HARMONİK FONKSİYONLAR ÜZERİNE

ELİF YAŞAR

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK FONKSİYONLAR ÜZERİNE

Elif YAŞAR

Prof. Dr. Sibel YALÇIN
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİMDALI

BURSA-2012

TEZ ONAYI

Elif YAŞAR tarafından hazırlanan "Harmonik Fonksiyonlar Üzerine" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Sibel YALÇIN

Başkan : Prof. Dr. Sibel YALÇIN
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Prof. Dr. İlhan TAPAN
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Prof. Dr. Mümin YAMANKARADENİZ
İstanbul Sabahattin Zaim Üniversitesi Eğitim Fakültesi
İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı
İmza

Üye : Prof. Dr. İsmail TOK
İstanbul Aydın Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Kadri ARSLAN

23/01/2012

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı **beyan ederim.**

23/01/2012

İmza

Elif YAŞAR

ÖZET

Doktora Tezi

HARMONİK FONKSİYONLAR ÜZERİNE

Elif YAŞAR

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sibel YALÇIN

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; analitik yalınkat, analitik çok katlı, yön koruyan harmonik yalınkat ve yön koruyan harmonik çok katlı fonksiyon sınıfları ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; harmonik yalınkat fonksiyonların kompleks mertebeli üç sınıfı Salagean türev operatörü yardımı ile tanımlanmış ve bu sınıflar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca, harmonik çok katlı fonksiyonların yeni bir sınıfı Salagean türev operatörü yardımı ile tanımlanmış ve bu sınıfın katsayı koşulları ile komşulukları araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde; harmonik yalınkat fonksiyonların iki farklı sınıfı, harmonik yalınkat fonksiyonların hipergeometrik fonksiyonlarla konvolüsyonu ile tanımlanmış ve katsayı koşulları ile komşulukları gibi çeşitli özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, harmonik çok katlı fonksiyonların hipergeometrik fonksiyonlar ile konvolüsyonları ile elde edilen yeni bir operatör tanımlanmıştır. Bu tanımlanan operatör ile oluşturulan harmonik çok katlı fonksiyonların yeni bir sınıfı tanımlanmış ve katsayı koşulları, distorsiyon sınırları, ekstrem noktaları araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde; elde edilen tüm sonuçlar değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Harmonik fonksiyonlar, yalınkat fonksiyonlar, yön koruyan fonksiyonlar, Salagean türev operatörü, hipergeometrik fonksiyon, konvolüsyon

2012, vii + 101 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

ON HARMONIC FUNCTIONS

Elif YAŞAR

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sibel YALÇIN

This study consists of four chapters.

In the first chapter; basic definitions and theorems are given belong to the classes of analytic univalent, analytic p-valent, sense-preserving harmonic univalent, sense-preserving harmonic p-valent functions.

In the second chapter; by using differential operator of Salagean, the classes of harmonic univalent functions with complex order are defined and relations between these classes are investigated. In addition, by using differential operator of Salagean, a new class of harmonic p-valent functions is defined and coefficient conditions and neighborhoods of the class in question are studied.

In the third chapter; by using convolution of harmonic univalent functions and hypergeometric functions, two classes of harmonic univalent functions are defined and some properties, such as coefficient conditions and neighborhoods are investigated. In addition, a new operator which is obtained by using the convolution of harmonic p-valent functions and hypergeometric functions is defined. By using this operator, a new class of harmonic p-valent functions is defined and coefficient conditions, distortion bounds, extreme points are studied.

In the fourth chapter; all obtained results are discussed.

Key Words: Harmonic functions, univalent functions, sense-preserving functions, differential operator of Salagean, hypergeometric function, convolution

2012, vii + 101 pages.

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim boyunca, ilgisini, bilimsel desteğini, hoşgörüsünü, sabrını benden esirgemeyen çok çalışkan ve alçakgönüllü olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sibel YALÇIN'a, doktora ders aşamasında ve tez yazım sürecinde yaptığı yardımlardan dolayı Sayın Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK'e, verdiği lisansüstü burslarıyla (yüksek lisans ve doktora) TÜBİTAK'a, bu günlere gelmemi sağlayan, sevgisini ve sabrını hiç esirgemeyen anne ve babama, bu zor ve uzun süreçte anlayışı, desteği, hissettirdiği sevgi ile her problemi aşmamı sağlayan çok sevdiğim eşim Emrullah YAŞAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Bu çalışma yakın bir zamanda doğacak olan oğluma ithaf edilmiştir.

Elif YAŞAR

23 / 01 / 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
U	$\{z : \lvert z \rvert < 1\}$, Birim Disk
$S^*(n,p)$	Çok katlı yıldızıl fonksiyonların kümesi
$K(n,p)$	Çok katlı konveks fonksiyonların kümesi
$C(n,p)$	Çok katlı konvekse yakın fonksiyonların kümesi
$(\lambda)_n$	$\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda+1)...(\lambda+n-1)$ değeri olan Pochhammer sembolü
A	U diskinde analitik ve normalizasyonu sağlayan fonksiyonların kümesi
S	U diskinde analitik, yalınkat ve normalizasyonu sağlayan fonksiyonların kümesi
S^*	U diskinde analitik, yalınkat ve yıldızıl olan fonksiyonların sınıfı
K	U diskinde analitik, yalınkat ve konveks olan fonksiyonların sınıfı
C	U diskinde analitik, yalınkat ve konvekse yakın olan fonksiyonların sınıfı
$S^*(\alpha)$	U diskinde analitik, yalınkat ve α mertebeli yıldızıl olan fonksiyonların sınıfı
$K(\alpha)$	U diskinde analitik, yalınkat ve α mertebeli konveks olan fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$K = h + \overline{g}$	Harmonik Koebe fonksiyonu
SH^*	Harmonik yıldızıl fonksiyonların sınıfı
KH	Harmonik konveks fonksiyonların sınıfı
CH	Harmonik konvekse yakın fonksiyonların sınıfı
$SH(n,p)$	Harmonik çok katlı fonksiyonların sınıfı
$A(n,p)$	$n, p \in \mathbb{N}$ için $a_p \neq 0$ olmak üzere U diskinde analitik ve normalizasyonu sağlayan çok katlı fonksiyonların kümesi
SH^0	$b_1 = 0$ ile normalize edilmiş $f \in SH$ fonksiyonlarının sınıfı
$f_1 * f_2$	f_1 ile f_2 fonksiyonunun konvolüsyonu
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$S^*(n,p,\alpha)$	α mertebeli çok katlı yıldızıl fonksiyonların kümesi
$K(n,p,\alpha)$	α mertebeli çok katlı konveks fonksiyonların kümesi
$SH^*(\alpha)$	α mertebeli harmonik yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$KH(\alpha)$	α mertebeli harmonik konveks fonksiyonların sınıfı
$SH^*(n,p,\alpha)$	α mertebeli harmonik çok katlı yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$KH(n,p,\alpha)$	α mertebeli harmonik çok katlı konveks fonksiyonların sınıfı
f_z	f nin z ye göre kısmi türevi

$f_{\bar{z}}$	f nin $\bar{z}$ e göre kısmi türevi
$J_f(z_0)$	f nin z_0 noktasındaki Jakobiyeni
$df(z_0)$	f nin z_0 noktasındaki tam diferensiyeli
μ_f	f nin kompleks genleşmesi
ν_f	f nin ikinci kompleks genleşmesi
$D^m f(z)$	f nin m. mertebeden Salagean türevi
$f^{(q)}$	f nin q. mertebeden türevi
$\overline{SH}$	$h(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k,\ g_m(z)=(-1)^m\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^k,\quad a_k,\ b_k\geq 0$ olmak üzere, $f_m=h+\overline{g_m}$ harmonik fonksiyonlarının oluşturduğu SH nın bir alt sınıfı
TSH	$h(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}\lvert A_n\rvert z^n,\quad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lvert B_n\rvert z^n\ ;\ \lvert B_1\rvert<1$ olmak üzere, $f=h+\bar{g}$ fonksiyonlarının oluşturduğu SH nın bir alt sınıfı
$SH^{0,*}$	$b_1=0$ özelliğindeki harmonik yıldızıl fonksiyonların sınıfı
KH^0	$b_1=0$ özelliğindeki harmonik konveks fonksiyonların sınıfı
CH^0	$b_1=0$ özelliğindeki harmonik konvekse yakın fonksiyonların sınıfı
$F(a,b;c;z)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}z^n$ serisine sahip olan Gauss hipergeometrik fonksiyonu
$k(z)$	$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ şeklindeki Koebe fonksiyonu
V_H	$n\geq 2,\ \alpha_n=\arg(A_n)$ ve $\beta_n=\arg(B_n)$ için $\alpha_n+(n-1)\zeta=\pi\ (\mathrm{mod}\ 2\pi),\quad \beta_n+(n+1)\zeta\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ eşitliklerini sağlayan bir ζ nın bulunduğu SH ya ait harmonik fonksiyonlar sınıfı (değişen argümentlere sahip harmonik fonksiyon sınıfı)

ŞEKİLLER DİZİNİ

GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisinin temelleri, 1851 yılında G. Bernard Riemann'ın "z-kompleks düzlemindeki bir basit bağlantılı $D_1 \neq \mathbb{C}$ bölgesini, w-kompleks düzleminde D_2 basit bağlantılı bölgesine resmeden bir f analitik fonksiyonu daima mevcuttur" şeklinde ifade ettiği teoremi ispatlamasıyla atılmıştır. Sonrasında bu teorem Riemann Dönüşüm Teoremi olarak isimlendirilmiştir. Ancak, bu teoremin bazı eksiklikleri olduğundan uygulamaları 20. yüzyılın başlarına kadar yapılamamıştır. 1907 yılında Koebe'nin Riemann Dönüşüm Teoremi'ni basit bağlantılı bölgeler üzerine olan problemleri, açık birim diske indirgemeye izin verecek şekilde yeniden düzenlemesiyle teorinin matematik ve mühendislik dallarında birçok uygulaması yapılmıştır.

Analitik yalınkat fonksiyonlar "Riemann dönüşümleri" olarak düşünüldüğünde, f nin analitik özelliklerinin $f(D)$ görüntü bölgesinin geometrik özelliklerini nasıl etkileyeceği akla gelir. Bu bakış açısı geometrik fonksiyonlar teorisinin temelini oluşturur. $f(0)=0$, $f'(0)=1$ normalizasyonunu sağlayan $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklinde seri açılımına sahip analitik ve yalınkat f fonksiyonlarının sınıfı S ile gösterilir. Bieberbach 1916 yılında yayınladığı makalede, birim diskin $f \in S$ fonksiyonu altındaki görüntüsünün orijin merkezli 1/4 yarıçaplı açık bir diski kapsadığını ispatladı. Aynı makalede Bieberbach "$f \in S$ ise $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ dir. Eşitlik $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ şeklindeki Koebe fonksiyonu tarafından sağlanır" tahminini yaptı. Bu tahmin ancak 1984 yılında Louis de Branges tarafından ispatlanabildi. 1984 yılına kadar Bieberbach tahmininin ispatlanamaması, bir çok yeni metodun geliştirilmesini ve S nin birçok alt sınıfının tanımlanıp araştırılmasını sağladı.

S sınıfı için 69 yıllık bir problem olan Bieberbach tahmininin ispatının ardından S sınıfı ve alt sınıfları için elde edilmiş olan sonuçların harmonik yalınkat fonksiyonların veya kısaca harmonik dönüşümlerin sınıfı olan SH ya genişletilip genişletilemeyeceği sorusu ortaya çıkmıştır. 1984 yılında James Clunie ve Terry Sheil-Small tarafından yapılan çalışma, bu sorunu cevabının olumlu olduğunu göstermiştir. Bu çalışmada, S sınıfı için elde edilen tahminlerin SH sınıfı için aynı olmadığını ancak, bazı kısıtlamalar altında benzer tahminlerin SH sınıfı için de yapılabileceği gösterilmiştir. Ayrıca, bu çalışmada S sınıfında ekstremal rol oynayan Koebe fonksiyonunun benzeri olan Harmonik Koebe fonksiyonu oluşturulmuştur. 1984 yılından beri harmonik fonksiyonlar teorisi hayal bile edilemeyecek hızla büyümektedir.

SH sınıfı için henüz çözülememiş problemler mevcuttur. Örneğin, SH sınıfına ait fonksiyonların katsayı sınırları, SH nın alt sınıfı olan harmonik yıldızıl fonksiyon sınıfının yıldızıllık yarıçapı ve SH nın alt sınıfı olan konveks harmonik fonksiyon sınıfına ait bir f fonksiyonunun hangi φ harmonik fonksiyonu ile konvolüsyonunun harmonik konveks bir fonksiyon olduğu gibi. SH sınıfı için elde edilecek sonuçların doğrudan ispatlanması veya kesin tahminlerinin yapılması güç olduğundan SH nın alt sınıfları üzerine araştırmalar yapılmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, harmonik yalınkat ve harmonik çok katlı fonksiyonların bazı alt sınıflarının katsayı koşulları, distorsiyon sınırları, ekstrem noktaları ve komşulukları gibi çeşitli özelliklerini elde etmektir. Çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Çalışmanın birinci bölümünde; diğer bölümlerde kullanılacak olan analitik yalınkat, analitik çok katlı, harmonik yalınkat ve harmonik çok katlı fonksiyonların tanımları ve söz konusu fonksiyonların sırasıyla, $A,\ S,\ A(n,p)$, $SH,\ SH(n,p)$ sınıflarına ait temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Ayrıca, $A,\ S,\ A(n,p)$, $SH,\ SH(n,p)$ sınıflarının bazı alt sınıflarının (yıldızıl, konveks, konvekse yakın gibi) tanımları ve bu sınıfların analitik ve geometrik özellikleri üzerinde durulmuştur.

Çalışmanın ikinci bölümünde; Salagean türev operatörü yardımıyla kurulan harmonik yalınkat ve harmonik çok katlı fonksiyonların bazı alt sınıfları ele alınmıştır. Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, Salagean türev operatörünün tanımı verilmiştir. İkinci kısımda, Owa ve Salagean'ın (1998a, 1998b) kompleks mertebeli analitik yıldızıl ve kompleks mertebeli Salagean tipi analitik fonksiyon sınıfları için yapmış oldukları iki çalışmada ele aldıkları problem, kompleks mertebeli Salagean tipi harmonik yalınkat fonksiyonlar için araştırılmıştır. Üç farklı sınıf tanımlanmış ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Tanımlanan sınıflar aşağıda verilmiştir.

$$f = h + \bar{g} \in SH\ ,\ D^m h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^m a_k z^k \quad \text{ve} \quad D^m g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^m b_k z^k$$

olmak üzere,

$$D^m f(z) = D^m h(z) + (-1)^m \overline{D^m g(z)}$$

için, SH nın alt sınıfları olan,

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{1}{b}\left(\frac{D^{m+1} f(z)}{D^m f(z)} - 1\right)\right\} > 0, \quad b \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$$

eşitsizliğini sağlayan $f \in SH$ fonksiyonlarının oluşturduğu $\overline{SH}(m,b)$ sınıfı,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m \left(2\left[k - 1 + |b|\right] a_k + \left[k + 1 + |k + 1 - 2b|\right] b_k\right) \le 4|b|\ ,$$

katsayı bağıntısını sağlayan $f \in SH$ fonksiyonlarından oluşan $\overline{SH_1}(m,b)$ sınıfı ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m \left(\left[(k-1)\frac{\operatorname{Re} b}{|b|} + |b|\right] a_k + \left[(k+1)\frac{\operatorname{Re} b}{|b|} - |b|\right] b_k\right) \le 2|b|$$

katsayı bağıntısını sağlayan $f \in SH$ fonksiyonlarından oluşan $\overline{SH_2}(m,b)$ sınıfıdır. Üçüncü kısımda ise, harmonik çok katlı fonksiyonların q. mertebeden türevi ile Salagean türevlerinin alınmasıyla oluşturulan yeni bir sınıfı tanımlanmış ve bu sınıfın katsayı koşulları, distorsiyon sınırları, ekstrem noktaları ile komşulukları araştırılmıştır. Tanımlanan yeni sınıf aşağıda verilmiştir.

$$f = h + \overline{g} \in SH(n,p),\ p > q,\ p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N},$$

$$h^{(q)}(z) = \tfrac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} + \sum_{k=n+p}^{\infty} \tfrac{k!}{(k-q)!} a_k\ z^{k-q},\ g^{(q)}(z) = \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \tfrac{k!}{(k-q)!} b_k\ z^{k-q},$$

$$D^m h^{(q)}(z) = \frac{(p-q)^m}{(p-q)!} p!\, z^{p-q} + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{(k-q)^m}{(k-q)!} k!\, a_k\ z^{k-q},$$

$$D^m g^{(q)}(z) = \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \frac{(k-q)^m}{(k-q)!} k!\, b_k\ z^{k-q}$$

olmak üzere,

$$D^m f^{(q)}(z) = D^m h^{(q)}(z) + (-1)^m\ \overline{D^m g^{(q)}(z)},$$

$$F(z) = (1-\lambda) D^m f^{(q)}(z) + \lambda D^{m+1} f^{(q)}(z) = H(z) + \overline{G(z)}$$

için $SH_{n,p}^m(q,\lambda,\alpha)$ sınıfı

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{zH'(z) - \overline{zG'(z)}}{H(z) + \overline{G(z)}} \right\} > \alpha(p-q)$$

eşitsizliğini sağlayan F fonksiyonlarından oluşur.

Çalışmanın üçüncü bölümü dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, harmonik yalınkat fonksiyonların hipergeometrik fonksiyonlarla konvolüsyonları ile elde edilen ve ilk olarak 2007 yılında Ahuja tarafından tanımlanmış olan lineer operatör ele alındı. Bu operatör;

$$f = h + \overline{g} \in SH \ , \phi_1(z) = zF(a_1, b_1; c_1; z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a_1)_{n-1}(b_1)_{n-1}}{(c_1)_{n-1}(1)_{n-1}} z^n ,$$

$$\phi_2(z) = zF(a_2, b_2; c_2; z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_2)_{n-1}(b_2)_{n-1}}{(c_2)_{n-1}(1)_{n-1}} z^n$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Omega_c^{a,b} f &:= f \,\tilde{*}\, (\phi_1 + \overline{\phi_2}) \\ &= h * \phi_1 + \overline{g * \phi_2} \end{aligned}$$

ile tanımlanır. $\Omega_c^{a,b} f$ operatörü ile oluşan yeni harmonik fonksiyon

$$H(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a_1)_{n-1}(b_1)_{n-1}}{(c_1)_{n-1}(1)_{n-1}} A_n z^n ,$$

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_2)_{n-1}(b_2)_{n-1}}{(c_2)_{n-1}(1)_{n-1}} B_n \ z^n$$

olmak üzere, $\left(\Omega_c^{a,b} f\right)(z) = H(z) + \overline{G(z)} \in SH$ formundadır. İkinci kısımda, harmonik yalınkat fonksiyonların kompleks mertebeli yeni bir sınıfı olan $SH(b, \lambda, \alpha)$, $\lambda \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $b \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ olmak üzere

$$\left| \frac{1}{b} \left((1-\lambda) \left(\frac{f(z)}{z} \right) + \lambda \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} f(z)}{\frac{\partial}{\partial \theta} z} \right) - 1 \right) \right| < \alpha$$

ile tanımlandı. $SH(b, \lambda, \alpha)$ sınıfının katsayı koşulları ile komşulukları gibi çeşitli özellikleri incelendi.

Üçüncü kısımda, $\left(\Omega_c^{a,b} f\right)(z) = H(z) + \overline{G(z)} \in SH$ operatörü kullanılarak, $k \geq 0$, $-1 \leq \gamma < 1$ için, $V_H US(k,\gamma)$ sınıfı

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{zH'(z) - \overline{zG'(z)}}{H(z) + \overline{G(z)}} - \gamma \right\} > k \left| \frac{zH'(z) - \overline{zG'(z)}}{H(z) + \overline{G(z)}} - 1 \right|$$

ve $V_H UC(k,\gamma)$ sınıfı

$$\operatorname{Re}\left\{ 1 + \frac{z^2 H''(z) + \overline{2zG'(z) + z^2 G''(z)}}{zH'(z) - \overline{zG'(z)}} - \gamma \right\} > k \left| \frac{z^2 H''(z) + \overline{2zG'(z) + z^2 G''(z)}}{zH'(z) - \overline{zG'(z)}} \right|$$

ile tanımlandı. Tanımlanan sınıfların katsayı koşulları ve komşulukları araştırıldı.

Dördüncü kısımda, a_1, a_2, c_1, c_2 pozitif reel sayılar, $\lambda \geq 0$, $f = h + \overline{g} \in SH(n,p)$ harmonik çok değerli fonksiyonları için,

$$D_\lambda f(z) = (1-\lambda)\left(h(z) + \overline{g(z)}\right) + \frac{\lambda}{p}\left(zh'(z) - \overline{zg'(z)}\right) = H(z) + \overline{G(z)},$$

$$\phi_1^p(a_1,c_1,z) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}} z^k,\ \phi_2^p(a_2,c_2,z) = \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}} z^k$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} L_p f(z) &:= L_p h(z) + \overline{L_p g(z)} \\ &= D_\lambda f(z) \,\tilde{*}\, \left(\phi_1^p(a_1,c_1,z) + \overline{\phi_2^p(a_2,c_2,z)}\right) \\ &= H(z) * \phi_1^p(a_1,c_1,z) + \overline{G(z) * \phi_2^p(a_2,c_2,z)}, \end{aligned}$$

operatörü tanımlandı. Bu operatör yardımıyla $SH_\alpha^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ sınıfı, $\lambda \geq 0,\ 0 \leq \alpha < 1,\ p \in \mathrm{N},\ n \in \mathrm{N}$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z\left(L_p h(z)\right)' - \overline{z\left(L_p g(z)\right)'}}{L_p h(z) + \overline{L_p g(z)}}\right\} > \alpha\, p$$

ile tanımlandı. $SH_{\alpha}^{n,p}(a_1, c_1, a_2, c_2, \lambda)$ sınıfının katsayı koşulları, distorsiyon sınırları, ekstrem noktaları araştırıldı.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, tüm elde edilen sonuçlar değerlendirildi.

1. ÖNBİLGİLER

Bu bölümde, diğer bölümlerde sıkça kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. (Ahlfors 1979, Goodman 1983, Duren 2004, Ahuja 2005, Şeker 2008, Bostancı 2008) kaynaklarından derlenmiştir.

1.1. Analitik Yalınkat ve Analitik Çok Katlı Fonksiyonlar

1.1.1. Tanım. Düzlemsel bir küme boş olmayan ayrık açık iki kümenin birleşimi şeklinde yazılamıyorsa kümeye bağlantılıdır, denir.

1.1.2. Tanım. Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı bir kümeye bölge denir. Eğer bir bölgenin tümleyeni açık ve bağlantılı ise bu bölgeye basit bağlantılı bölge denir.

1.1.3. Tanım. Kompleks düzlemin bir D bölgesinde $f: D \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in D$ noktasından geçen ve aralarında α açısı bulunan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrilerinin de $w_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı varsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında bir konform dönüşümdür denir. Eğer f fonksiyonu her $z_0 \in D$ noktasında konform ise f fonksiyonuna D bölgesinde konformdur denir.

1.1.4. Tanım. Bir D bölgesinde analitik olan bir f fonksiyonu için, $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $z_1 \neq z_2$ iken $f(z_1) \neq f(z_2)$ ise f fonksiyonuna D bölgesinde yalınkattır denir.

D bölgesindeki yalınkatlık D bölgesinin her alt bölgesinde de sağlanır. Bir D bölgesinde tanımlı herhangi bir f fonksiyonu, bir $z_0 \in D$ noktasının en az bir komşuluğunda yalınkat ise f fonksiyonuna $z_0 \in D$ noktasında yerel yalınkat fonksiyon adı verilir. Analitik bir f fonksiyonu için $f'(z_0) \neq 0$ koşulu, z_0 noktasında yerel yalınkatlığa eş değerdir. Bir bölgede yerel yalınkat olan bir analitik fonksiyon yalınkat olmayabilir.

1.1.5. Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi). D, kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz alt kümesi ve $z_0 \in D$ noktası verilmiş olsun. Bu takdirde $f(z_0)=0,\ f'(z_0)>0$ özelliğinde D yi $U=\{z:|z|<1\}$ birim diski üzerine birebir olarak resmeden bir tek f analitik fonksiyonu vardır (Riemann 1851).

Yalınkat fonksiyonlar teorisi çok geniş ve karmaşık olduğundan bazı kısıtlamalar yapmak gerekir. Riemann Dönüşüm Teoremi gereği, tezin geri kalan kısmında genel olarak D bölgesi yerine U birim diski alınacaktır.

1.1.6. Tanım. U birim diskinde analitik ve $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulları ile normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı A ile gösterilsin. Her $f \in A$ fonksiyonu,

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \tag{1.1}$$

şeklinde bir Taylor serisi ile ifade edilebilir.

1.1.7. Tanım. U birim diskinde analitik, $f(0)=f'(0)-1=0$ ile normalize edilmiş ve yalınkat olan fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir.

Yalınkat fonksiyonlar teorisinde önemli yer tutan ünlü Bieberbach Teoremi, S sınıfına ait bir f fonksiyonunun a_2 katsayısının hesaplanmasında büyük rol oynar.

1.1.8. Teorem (Bieberbach Teoremi). S sınıfındaki her f fonksiyonu için $|a_2|\le 2$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik hali, $\sum_{n=1}^{\infty}nz^n=z+2z^2+\cdots$ şeklinde Taylor seri açılımına sahip $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu ve rotasyonları tarafından sağlanır (Bieberbach 1916).

Verilen koşullar altında eşitlik işaretini sağlayan bir fonksiyon mevcut ise eşitsizliği geliştirmek (üst sınırı azaltmak veya alt sınırı arttırmak) imkansız olduğundan, bu durumdaki eşitsizliğe kesin eşitsizlik denir. Koebe fonksiyonu S sınıfında ve bu fonksiyon için $a_2 = 2$ olduğundan, Teorem 1.1.8 deki $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği kesindir. Eşitliği sağlayan bir fonksiyona ekstremal fonksiyon denir. Böylece Koebe fonksiyonu ekstremal fonksiyondur.

S sınıfına ait fonksiyonlar için $|a_2| \leq 2$ bağıntısı kullanılarak, bu sınıfa ait bazı sonuçlar (Teorem 1.1.9, 1.1.10, 1.1.11, 1.1.12) elde edilebilir:

1.1.9. Teorem (Koebe Dörtte Bir Teoremi). $f \in S$ ve f fonksiyonu γ değerini almasın. Yani $f(z) = \gamma$ denkleminin U da çözümü bulunmasın. Bu takdirde, $|\gamma| \geq \frac{1}{4}$ dür. Eşitlik, Koebe fonksiyonu ve rotasyonları tarafından sağlanır (Koebe 1907).

Koebe Dörtte Bir Teoremi, S sınıfına ait her f fonksiyonunun $f(U)$ görüntü bölgesinin orijin merkezli 1/4 yarıçaplı açık bir diski kapsadığını gösterir.

1.1.10. Teorem (Distorsiyon Teoremi). $f \in S$ olsun. Bu takdirde, her bir $z = re^{i\theta} \in U$ için

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

dir. Her iki eşitsizlik kesin olup eşitlik Koebe fonksiyonu ve rotasyonları tarafından sağlanır.

1.1.11. Teorem (Büyüme Teoremi). $f \in S$ olsun. Bu takdirde, her bir $z = re^{i\theta} \in U$ için

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

dir. Eşitlik Koebe fonksiyonu ve rotasyonları tarafından sağlanır.

1.1.12. Teorem. $f \in S$ ve her bir $z = re^{i\theta} \in U$ için

$$\frac{1-r}{1+r} \le \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \le \frac{1+r}{1-r}$$

dir. Eşitlik Koebe fonksiyonu ve rotasyonları tarafından sağlanır.

1.1.13. Bieberbach Tahmini. S sınıfındaki her f fonksiyonu $n \ge 2$ olmak üzere $|a_n| \le n$ eşitsizliğini sağlar. Eşitlik ancak ve ancak Koebe fonksiyonu ve rotasyonları için sağlanır (Bieberbach 1916).

Bieberbach tahmininin ispatlanması uzun yıllar almıştır. S sınıfına ait fonksiyonlar için bazı yazarlar tarafından bulunan kesin olmayan tahminler aşağıda verilmiştir:

$\lvert a_n \rvert < 5{,}1 n^2$	(Bieberbach 1918)
$\lvert a_n \rvert < ne$	(Littlewood 1923)
$\lvert a_n \rvert < 0{,}75 ne$	(Galuzin 1948)
$\lvert a_n \rvert < 0{,}5 ne$	(Baernstain 1974)
$\lvert a_n \rvert < 1{,}08 n$	(Fitz Gerald 1972)
$\lvert a_n \rvert < 1{,}066 n$	(Horowitz 1978)

Nihayet 1984 yılında Louis de Branges Bieberbach tahminini ispatlamıştır.

1.1.14. Tanım. $w = f(z)$ denklemi bir D bölgesinde her farklı w değeri için en fazla p tane köke sahip ise f fonksiyonuna p-katlı fonksiyon (veya D bölgesinde p mertebeden çok değerli veya kısaca çok katlı) denir.

1.1.15. Tanım. $n, p \in \mathbb{N}$ için $a_p \neq 0$ olmak üzere, U birim diskinde analitik olan

$$f(z) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k z^k \tag{1.2}$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı $A(n, p)$ ile gösterilir.

1.2. Analitik Yalınkat ve Analitik Çok Katlı Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

1.2.1. Tanım. Düzlemde bir D kümesi ve bir $w_0 \in D$ noktası verilmiş olsun. Eğer w_0 noktasını diğer her bir $w \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D içinde kalıyorsa, D kümesine w_0 noktasına göre yıldızıldır denir. Özel olarak $w_0 = 0$ için D bölgesi orijine göre yıldızıldır, ya da, sadece D bölgesi yıldızıldır denir.

1.2.2. Tanım. f fonksiyonu U da yalınkat olmak üzere her $z \in U$ için $f(z)$, U birim diskini $w_0 = f(z_0)$ noktasına göre yıldızıl olan bir başka bölgeye resmediyorsa, $f(z)$ fonksiyonu w_0 noktasına göre yıldızıldır denir. Özel olarak $w_0 = 0$ alınırsa $f(z)$ fonksiyonu yıldızıl fonksiyon olarak adlandırılır.

Yıldızıl fonksiyonların kümesi S^* ile gösterilir. Koebe fonksiyonu, $w_0 > -\frac{1}{4}$ olmak üzere w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyondur.

1.2.3. Teorem. $f(z)$, $U_R :|z| \leq R$ kapalı diskinde analitik ve yalınkat bir fonksiyon olsun. $C_R :|z| = R$ ve her $z \in C_R$ için $f(z)$ nin U_R yi $w = 0$ noktasına göre yıldızıl bir bölgeye resmetmesi için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq 0 \tag{1.3}$$

olmasıdır (Nevanlinna 1921).

1.2.4. Tanım. Düzlemde bir D bölgesi verilmiş olsun. Farklı herhangi $z, w \in D$ noktaları ve $0 \le t \le 1$ için $tz + (1-t)w$ doğru parçası D de kalıyorsa D ye konveks bölge denir.

1.2.5. Tanım. $f(U)$ konveks bir bölge ise U da analitik ve yalınkat f fonksiyonuna konvekstir denir. S sınıfına ait konveks fonksiyonların kümesi K ile gösterilir.

Örneğin, $l(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu U birim diskini sağ yarı düzleme resmettiğinden konvekstir.

1.2.6. Teorem. $f(z)$, $U_R : |z| \le R$ kapalı diskinde analitik ve yalınkat bir fonksiyon olsun. $C_R : |z| = R$ ve her $z \in C_R$ için $f(z)$ nin U_R yi $w = 0$ noktasına göre konveks bir bölgeye resmetmesi için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \ge 0 \tag{1.4}$$

olmasıdır (Study 1913).

1.2.7. Teorem (Alexander Teoremi). U_R de $f'(z) \ne 0$ olmak üzere, $f(z)$ nin U_R de konveks olması için gerek ve yeter şart $F(z) = zf'(z)$ fonksiyonunun U_R de yıldızıl olmasıdır (Alexander 1915).

Her pozitif $\rho \le 2 - \sqrt{3}$ sayısı için her bir $f \in S$ fonksiyonu, $|z| < \rho$ diskini konveks bir bölge üzerine dönüştürür. Bu durum her $\rho > 2 - \sqrt{3}$ için yanlıştır (Goodman 1983). Buradaki $2 - \sqrt{3} = 0{,}267\cdots$ sayısına S sınıfı için konvekslik yarıçapı denir. ρ sayısı, her c için $f(\rho z)$, U birim diskinde konveks olacak şekildeki en büyük sayıdır. Her $f \in S$ için yıldızıllık yarıçapı da $\tanh\frac{\pi}{4} = 0{,}655\cdots$ olarak bilinmektedir.

1.2.8. Tanım. Keyfi bir *D* bölgesinin tümleyeni birbiri ile kesişmeyen yarı doğruların bir birleşimi şeklinde yazılabiliyor ise *D* bölgesine konvekse yakın bölge denir.

1.2.9. Tanım. Bir *f* fonksiyonu *U* birim diskinde analitik olmak üzere,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0 \tag{1.5}$$

olacak şekilde konveks bir g fonksiyonu veya eşdeğer olarak,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\right\} > 0$$

eşitsizliğini sağlayan yıldızıl bir g fonksiyonu varsa, f fonksiyonuna konvekse yakın fonksiyon denir (Kaplan 1952). Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı *C* ile gösterilir.

S sınıfının S^*, *K* ve *C* alt sınıfları için

$$K \subset S^* \subset C \subset S$$

kapsama bağıntısı yazılabilir.

1.2.10. Tanım. *S* sınıfına ait bir *f* fonksiyonu, tüm $z \in U$ için

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \tag{1.6}$$

koşulunu sağlıyorsa, f fonksiyonuna α-mertebeli yıldızıl fonksiyon adı verilir (Robertson 1936). Bu şekildeki fonksiyonların kümesi $S^*(\alpha)$ ile gösterilir.

1.2.11. Tanım. *S* sınıfına ait bir *f* fonksiyonu, tüm $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha$$

koşulunu sağlıyorsa, f fonksiyonuna α-mertebeli konveks fonksiyon adı verilir (Robertson 1936). Bu şekildeki fonksiyonların kümesi $K(\alpha)$ ile gösterilir.

Ayrıca,

$$\left.\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|_{z=0} = 1 + \left.\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|_{z=0} = 1$$

olduğundan $\alpha \leq 1$ olması gerektiği açıktır. Aksi takdirde $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ kümeleri boş olacaktır. $\alpha = 1$ ise $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ kümeleri sadece bir fonksiyona sahip olur: $f(z) = z$. Genelde $0 \leq \alpha < 1$ koşulu göz önüne alınacaktır. α değeri arttıkça $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ kümeleri küçülmektedir (Goodman 1983).

1.2.12. Tanım. $A(n,p)$ sınıfındaki bir *f* fonksiyonunun *U* birim diskinde (1.3), (1.4) ve (1.5) koşullarını sağlaması durumunda bu fonksiyonlara, sırasıyla, çok katlı yıldızıl, çok katlı konveks ve çok katlı konvekse yakın fonksiyon denir. Bu fonksiyon sınıfları sırasıyla, $S^*(n,p), K(n,p), C(n,p)$ ile gösterilir.

1.2.13. Teorem. $A(n,p)$ sınıfına ait bir *f* fonksiyonunun $K(n,p)$ sınıfına ait olması için gerekli ve yeterli koşul $\dfrac{zf'(z)}{p}$ fonksiyonunun $S^*(n,p)$ sınıfında olmasıdır (Nunokawa 1987).

Ayrıca, $K(n,p) \subset S^*(n,p)$ kapsaması da yazılabilir.

1.2.14. Tanım. $f \in A(n,p)$ fonksiyonu, her $z \in U$, $n,p \in \mathbb{N}$ olmak üzere, en az bir $0 \le \alpha < p$ değeri için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha, \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) d\theta = 2p\pi$$

ve

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha, \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) d\theta = 2p\pi$$

koşullarını sağlıyorsa, sırasıyla, α-mertebeli çok katlı yıldızıl fonksiyon, α-mertebeli çok katlı konveks fonksiyon adını alır. $A(n,p)$ sınıfının alt sınıfı olan α-mertebeli çok katlı yıldızıl fonksiyon ve α-mertebeli çok katlı konveks fonksiyon sınıfları, sırasıyla, $S^*(n,p,\alpha)$ ve $K(n,p,\alpha)$ ile gösterilir.

$S^*(n,p)$, $K(n,p)$, $S^*(n,p,\alpha)$ ve $K(n,p,\alpha)$ sınıfları için,

(i) $S^*(n,p,\alpha) \subseteq S^*(n,p)$,

(ii) $K(n,p,\alpha) \subseteq K(n,p)$,

(iii) $K(n,p,\alpha) \subset S^*(n,p,\alpha) \subset A(n,p)$ kapsamaları yazılabilir.

1.3. Harmonik Yalınkat ve Harmonik Çok Katlı Fonksiyonlar

1.3.1. Tanım. D, $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde bir bölge ve $u : D \to \mathbb{R}$, D de ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Eğer her $z \in D$ için

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ise, u ya D de reel harmoniktir denir. Eğer u ve v bir D bölgesinde reel harmonik iki fonksiyon ise $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ fonksiyonuna D de kompleks harmoniktir, kısaca harmoniktir denir.

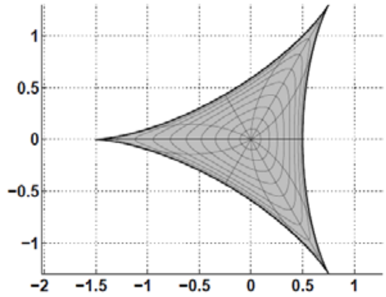
Harmonik fonksiyonlar analitik olmak zorunda olmadığından analitik yalınkat fonksiyonlar için geçerli olan bazı özellikler harmonik yalınkat fonksiyonlar için geçerli değildir. Örneğin analitik fonksiyonlar bileşke işlemi altında korunmasına rağmen, harmonik fonksiyonlar korunmaz. Yani, f harmonik ϑ analitik fonksiyonları için $f \circ \vartheta$ harmonik olmasına rağmen, $\vartheta \circ f$ fonksiyonunun harmonik olması gerekmez. Analitik fonksiyonların sınıfı bir cebir oluşturmasına rağmen, harmonik fonksiyonların sınıfı oluşturmaz. Ayrıca bir harmonik yalınkat fonksiyonun tersi de harmonik olmak zorunda değildir. Üstelik harmonik yalınkat fonksiyonların sınır davranışı, konform dönüşümlerin sınır davranışından çok daha karmaşıktır. Bununla birlikte, konform dönüşümlerin bilinen teorisi bir şekilde harmonik yalınkat fonksiyonlara taşınabilir (Duren 2004).

Konform olması gerekmeyen harmonik yalınkat fonksiyonların en temel örnekleri $|\alpha| \neq |\beta|$ olmak üzere

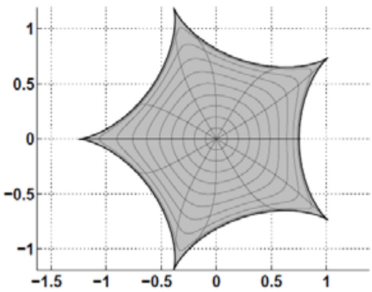
$$f(z) = \alpha z + \gamma + \beta \bar{z}$$

formundaki afin dönüşümlerdir. Bu dönüşümler kompleks düzlemden kendisi üzerine harmonik yalınkat fonksiyonlardır.

Bir diğer önemli örnek, $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2$ şeklindeki harmonik yalınkat fonksiyonlardır. Bu fonksiyon, U birim diskini $|w| = \frac{3}{2}$ çemberi içinde kalan 3 kanatlı bir hiposikloidin iç bölgesi üzerine dönüştürür. Benzer şekilde, $n \geq 2$ için $f(z) = z + \frac{1}{n}\bar{z}^n$ fonksiyonu da harmonik yalınkat olup bu dönüşüm altında U birim diskinin görüntüsü, $|w|=\dfrac{n+1}{n}$ çemberi içinde kalan $n+1$ köşeli eğrisel bir çokgendir (Duren 2004).



Şekil 1.1. *U* birim diskinin $f(z)=z+\dfrac{1}{2}\bar{z}^2$ dönüşümü altındaki görüntüsü



Şekil 1.2. *U* birim diskinin $f(z)=z+\dfrac{1}{4}\bar{z}^4$ dönüşümü altındaki görüntüsü

1.3.2. Yardımcı Teorem (Kanonik Gösterim). Basit bağlantılı bir D bölgesinde bir f harmonik fonksiyonu, h ve g analitik fonksiyonlar olmak üzere,

$$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$$

biçiminde yazılabilir. Bu gösterim sabit farkıyla tektir.

İspat. u ve v basit bağlantılı bir D bölgesinde harmonik fonksiyonlar olmak üzere $f=u+iv$ harmonik fonksiyonu alınsın. Bu durumda,

$$u=\operatorname{Re}F=\frac{F+\overline{F}}{2},\; v=\operatorname{Im}G=\frac{G-\overline{G}}{2i}$$

olacak şekilde D bölgesi üzerinde analitik F ve G fonksiyonları vardır. Böylece h ve g fonksiyonları D bölgesinde analitik olmak üzere,

$$\begin{aligned} f &= \frac{F+\overline{F}}{2}+\frac{G-\overline{G}}{2} \\ &= \left(\frac{F+G}{2}\right)+\left(\frac{\overline{F}-\overline{G}}{2}\right) \\ &= h+\overline{g} \end{aligned}$$

şeklinde kanonik gösterimi elde edilir. □

Yardımcı Teorem 1.3.2. de verilen h ve g fonksiyonları f fonksiyonunun sırasıyla analitik ve ko-analitik kısımları olarak adlandırılır.

1.3.3. Tanım. D, $\mathbb{C}$ de bir bölge, $f=u+iv$ D de diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. f nin kısmi türevleri

$$f_z=\frac{1}{2}\left(f_x-if_y\right),\; f_{\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(f_x+if_y\right)$$

ve $z_0 \in D$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} J_f(z_0) &= \begin{vmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{vmatrix} \\ &= u_x(z_0)v_y(z_0)-u_y(z_0)v_x(z_0) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $J_f(z_0)$ değerine f nin z_0 daki Jakobiyeni denir. Eğer f fonksiyonu analitik ise $J_f(z_0)=|f'(z_0)|^2$ dir.

$f=h+\overline{g}$ D basit bağlantılı bölgesinde harmonik bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun bir $z_0 \in D$ noktasındaki Jakobiyeni

$$J_f(z_0) = |f_z(z_0)|^2 - |f_{\bar{z}}(z_0)|^2$$
$$= |h'(z_0)|^2 - |g'(z_0)|^2$$

dir.

1.3.4. Tanım. *D*, $\mathbb{C}$ de bir bölge ve $f : D \to \mathbb{C}$ birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Eğer her $z \in D$ için $J_f(z) > 0$ ise *f* ye *D* de yön koruyan, $J_f(z) < 0$ ise *f* ye *D* de yönü ters çeviren denir. Eğer *f* yön koruyan ise $\bar{f}$ fonksiyonu yönü ters çevirendir.

1.3.5. Sonuç. $f = h + \bar{g}$ harmonik fonksiyonunun yerel yalınkat olması için gerek ve yeter şart $J_f(z) \neq 0$ olmasıdır. Buna ilaveten *f* yön koruyan ise $J_f > 0$ yani $\frac{|g'(z)|}{|h'(z)|} < 1$ dir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

f nin z_0 daki tam diferensiyeli,

$$df(z_0) = f_z(z_0)dz + f_{\bar{z}}(z_0)d\bar{z}$$

bir afin dönüşüm olup z_0 merkezli çemberleri yarı eksen uzunlukları $|f_z(z_0)| - |f_{\bar{z}}(z_0)|$, $|f_z(z_0)| + |f_{\bar{z}}(z_0)|$ olan elipslere dönüştürür.

1.3.6. Tanım. *D*, $\mathbb{C}$ de bir bölge ve $f : D \to \mathrm{C}$ yön koruyan bir diffeomorfizm olsun. Eğer *D* de

$$D_f = \frac{|f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|} \leq K$$

olacak şekilde bir *K*, $K \geq 1$ sabiti varsa *f* ye *D* de *k*-kuasikonform veya kuasikonform dönüşüm denir. $K = 1$ olması durumunda $f_{\bar{z}} = 0$ olup *f* konform bir dönüşümdür.

1.3.7. Tanım. $\mu_f = \dfrac{f_{\bar{z}}}{f_z}$ oranına f fonksiyonunun kompleks genleşmesi (dilatasyonu) denir. Eğer f yön koruyan bir dönüşüm ise $0 \le |\mu_f| < 1$ olduğu açıktır. Ayrıca $D_f(z) \le K$ olması için gerek ve yeter şart $|\mu_f(z)| \le \frac{K-1}{K+1}$ olmasıdır. Yani yön koruyan bir homeomeorfizmin kuasikonform olması için gerek ve yeter şart verilen bir bölgede onun kompleks genleşmesinin $|\mu_f(z)| \le K < 1$ olmasıdır.

1.3.8. Tanım. $\nu_f = \dfrac{\overline{f_{\bar{z}}}}{f_z}$ oranına f fonksiyonunun ikinci kompleks genleşmesi denir ve μ_f genleşmesinden daha çok kullanılır. $|\mu_f| = |\nu_f|$ olduğundan f fonksiyonunun kuasikonform olması için gerek ve yeter şart $|\nu_f(z)| \le K < 1$ olmasıdır.

1.3.9. Teorem. *f* bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde yerel olarak yalınkat ve yön koruyan olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter şart $w = \nu_f = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ fonksiyonunun *D* de analitik olmasıdır (Hengartner ve Schober 1986).

İspat. f fonksiyonu D de yerel yalınkat ve $J_f(z) > 0$ olsun. $\overline{f_{\bar{z}}} = w f_z$ eşitliğinin $\bar{z}$ e göre türevi ve $\left(\overline{f}\right)_{\bar{z}} = \overline{f_z}$ eşitliği dikkate alınırsa

$$\overline{f_{\bar{z}z}} = f_{z\bar{z}} w + f_z w_{\bar{z}} \tag{1.7}$$

elde edilir. f harmonik olduğundan $f_{z\bar{z}} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ olup (1.7) bağıntısı gereği D de $w_{\bar{z}} = 0$ elde edilir. Bu da *w* fonksiyonunun *D* de analitik olduğunu gösterir.

Tersine, eğer w D de analitik ise $w_{\bar{z}} = 0$ olup (1.7) eşitliğinden $\overline{f_{\bar{z}z}} = f_{z\bar{z}} w$ olur. f fonksiyonu D de yerel olarak yalınkat ve $J_f(z) > 0$ olduğundan, her $z \in D$ için $|w(z)| < 1$ dir. O halde $\overline{f_{\bar{z}z}} = f_{z\bar{z}} w$ eşitliği ancak $f_{z\bar{z}} = 0$ olması durumunda sağlanır. Bu ise *f* fonksiyonunun *D* de harmonik olduğunu gösterir. □

Teorem 1.3.9 özellikle yön koruyan *f* harmonik yalınkat fonksiyonunun ikinci kompleks genleşmesi olan $w = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ fonksiyonunun analitik ve modülünün 1 den daha küçük olduğunu gösterir. Bu sebepten $w = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ fonksiyonuna f fonksiyonunun analitik genleşmesi veya kısaca genleşmesi de denir. Ayrıca "$w \equiv 0$ olması için gerek ve yeter şart *f* fonksiyonunun analitik olmasıdır" önermesinin doğruluğu açıktır.

1.3.10. Tanım. *U* birim diski üzerinde tüm harmonik, karmaşık değerli, yön koruyan, $f(0) = 0,\ f_z(0) = 1$ ile normalize edilmiş ve yalınkat fonksiyonların sınıfı SH ile tanımlansın. Böylece *SH* sınıfındaki bir *f* fonksiyonu

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,\ g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{1.8}$$

fonksiyonları *U* birim diskinde analitik olmak üzere $f = h + \overline{g}$ şeklinde gösterilir.

1.3.11. Tanım. $g'(0) = b_1 = 0$ bağıntısını sağlayan $f \in SH$ fonksiyonlarının sınıfı SH^0 ile tanımlansın.

SH sınıfına ait fonksiyonlar yön koruyan olduğundan $|b_1| < |a_1| = 1$ dir. SH ve SH^0 sınıflarının birinden diğerine geçmek mümkündür. Yani her $f \in SH$ için

$$f_0 = \frac{f - \overline{b_1 f}}{1 - |b_1|^2}$$

fonksiyonu SH^0 sınıfına aittir. Tersine, her $f_0 \in SH^0$ için,

$$f = f_0 + \overline{b_1 f_0}$$

fonksiyonu SH sınıfına aittir. Böylece, SH^0 alt sınıfı için elde edilen bazı sonuçlar SH sınıfına genelleştirilebilir. S, SH^0 ve SH sınıfları arasında $S \subset SH^0 \subset SH$ kapsaması sağlanır.

1.3.12. Tanım. F, bir D bölgesinde sürekli fonksiyonların bir ailesi olsun. F nin her bir dizisi, D nin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak bir alt diziye sahip ise, F ailesine normaldir denir.

1.3.13. Tanım. F, normal bir aile ve φ, U dan U ya analitik bir fonksiyon olsun. Eğer her $f \in F$ için $f \circ \varphi$ fonksiyonlarının oluşturduğu aile normal ise f ye normal fonksiyon denir.

Eğer F, analitik veya harmonik fonksiyonlardan oluşan bir aile ise F nin normal olması, yerel olarak sınırlı olmasıdır (Galuzin 1969).

1.3.14. Teorem. SH^0 kompakt ve normal bir ailedir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

1.3.15. Sonuç. SH normal bir ailedir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

S ve SH^0 ailelerinin aksine, SH ailesi kompakt bir aile değildir. Çünkü, $f_n(z) = z + \frac{n}{n+1}\bar{z}$ ile tanımlanan afin dönüşümler SH sınıfındandır. $z = x + iy$ için $f_n(z) \to f(z) = 2x$ yakınsaması U birim diskinde düzgündür ancak limit fonksiyonu yalınkat değildir.

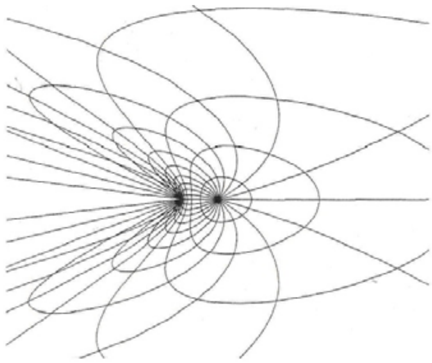
1.3.16. Tanım. $f_i(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n_i} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_{n_i} z^n}$ $(i = 1,2)$ şeklindeki iki harmonik fonksiyonun konvolüsyonu

$$f_1(z) * f_2(z) = (f_1 * f_2)(z)$$
$$= z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n_1} a_{n_2} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_{n_1} b_{n_2} z^n}$$

ile tanımlanır. Eğer f_1 ve f_2 fonksiyonlarının ko-analitik kısımları sıfır ise yukarıda verilen konvolüsyon formülü analitik fonksiyonlar için bilinen Hadamard çarpımına indirgenir.

1.3.17. Tanım (Harmonik Koebe Fonksiyonu).

$h(z) = \dfrac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$ ve $g(z) = \dfrac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$ olmak üzere $K = h + \overline{g}$ harmonik fonksiyonuna Harmonik Koebe fonksiyonu denir.



Şekil 1.3. Harmonik Koebe Fonksiyonu

Clunie ve Sheil-Small (1984) analitik yalınkat fonksiyonlar için tanımlanan Koebe fonksiyonunun benzerini SH^0 sınıfı için üretti. Harmonik Koebe fonksiyonu, birim diski reel eksenden $(-\infty, -\frac{1}{6}]$ aralığı çıkarılmış kompleks düzlem üzerine birebir ve harmonik olarak resmeder. Koebe fonksiyonunun S sınıfında oynadığı rolü Harmonik Koebe fonksiyonu SH^0 sınıfında oynar.

SH^0 ve SH sınıfındaki fonksiyonların katsayı tahminleri halen çalışılan açık bir problemdir. Şimdiye kadar $|b_2|$ için kesin sınır elde edilmiş olup $|a_2|$ için henüz ispatlanmamış olan $|a_2| \le \frac{5}{2}$ tahmini yapılmıştır. Katsayı problemi için Harmonik Koebe fonksiyonunun bir ekstremal fonksiyon olduğu tahmin edilmektedir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

1.3.18. Teorem. $f = h + \overline{g} \in SH^0$ fonksiyonları için $|b_2| \le \frac{1}{2}$ dir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

1.3.19. Teorem. $f = h + \overline{g} \in SH$ ve $z \in U$ için

$$|b_2| < \begin{cases} \left(1 + |a_2|^2\right)/2 & , |a_2| \le 1 \\ |a_2| & , |a_2| > 1 \end{cases}$$

dir (Öztürk 1995).

1.3.20. Teorem. $f \in SH$ olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \le \frac{96\pi}{\sqrt{27}} - 1 < 57{,}05$$

dir (Sheil-Small 1990).

Analitik yalınkat fonksiyonlarda olduğu gibi, *SH* sınıfındaki fonksiyonların a_2 katsayısı için bulunacak sınırlar *SH* ve SH^0 sınıflarına ait fonksiyonların mutlak değeriyle ilgili alt ve üst sınırların bulunmasına yardımcı olur.

1.3.21. Teorem. $f = h + \overline{g} \in SH$ ve h ile g (1.8) ile verildiği gibi olsun. Bu takdirde $\alpha = \sup\{|a_2| : f \in SH\}$ ve $|z| \le r < 1$ olmak üzere,

$$|\arg h'(z)| \le 2\alpha \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right),$$

$$\frac{(1-r)^{\alpha-1}}{(1+r)^{\alpha+1}} \leq |h'(z)| \leq \frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha+1}}$$

ve

$$|f(z)| \leq 2\int_0^r \frac{(1+t)^{\alpha-1}}{(1-t)^{\alpha+1}} dt$$

dir (Sheil-Small 1990).

1.3.22. Sonuç. $f \in SH^0$ ise $z \in U$ için

$$|f(z)| \geq \frac{1}{4}\frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

dir. Böylece $\{w : |w| < \frac{1}{16}\} \subseteq f(U)$ dir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

Teorem 1.3.22 ile verilen sonuç kesin değildir. Bununla beraber K Harmonik Koebe fonksiyonu, $\frac{1}{16}$ yarıçapının $\frac{1}{6}$ ya genişletilebileceğini söyler. Böylece tahmin niteliğindeki Sonuç 1.3.23, 1.3.24 ve 1.3.25 verilebilir.

1.3.23. Sonuç. Her $f \in SH^0$ için $\{w : |w| < \frac{1}{6}\} \subset f(U)$ kapsaması doğrudur.

1.3.24. Sonuç. $f = h + \overline{g} \in SH^0$ olsun. Bu takdirde,

$$\left| |a_n| - |b_n| \right| \leq n$$

$$|a_n| \leq \frac{(2n+1)(n+1)}{6} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

$$|b_n| \leq \frac{(2n-1)(n-1)}{6} \quad (n = 2,3,\cdots) \tag{1.9}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik hali Harmonik Koebe fonksiyonu için elde edilir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

1.3.25. Sonuç. $f \in SH$ olsun. Bu takdirde,

$$|a_n| < \frac{2n^2+1}{3} \text{ ve } |b_n| < \frac{2n^2+1}{3} \quad ; n = 1,2,\cdots$$

eşitsizlikleri sağlanır (Clunie ve Sheil-Small 1984).

1.3.26. Tanım. *U* birim diskinde yön koruyan harmonik çok katlı fonksiyonların sınıfı $SH(n,p)$ ile gösterilsin. $f = h + \overline{g} \in SH(n,p)$ fonksiyonları,

$$h(z) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k z^k, \; g(z) = \sum_{k=n+p-1}^{\infty} b_k z^k, \quad |b_p| < 1 \tag{1.10}$$

şeklindeki *h* ve *g* analitik fonksiyonları ile tanımlanır.

$f = h + \overline{g} \in SH(n,p)$ fonksiyonunun ko-analitik kısmı sıfıra özdeş ise, yani $g = 0$ ise, analitik çok katlı fonksiyonların sınıfı olan $S(n,p)$ elde edilir.

1.4. Harmonik Yalınkat ve Harmonik Çok Katlı Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

1.4.1. Tanım. $f \in SH$ (özel olarak SH^0) ve $f(U)$ görüntüsü yıldızıl bir bölge ise *f* fonksiyonuna harmonik yıldızıl fonksiyon denir. Harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı SH^* ($SH^{0,*}$) ile gösterilir.

1.4.2. Tanım. $f \in SH$ (özel olarak SH^0) ve $f(U)$ görüntüsü konveks bir bölge ise f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir. Harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı KH (KH^0) ile gösterilir.

1.4.3. Tanım. $f \in SH$ (özel olarak SH^0) ve $f(U)$ görüntüsü konvekse yakın bir bölge ise f fonksiyonuna harmonik konvekse yakın fonksiyon denir. Harmonik konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı CH (CH^0) ile gösterilir.

1.4.4. Teorem. Her bir $f \in SH^{0,*}$ için $n = 2,3,\cdots$ olmak üzere

$$|a_n| \leq \frac{(2n+1)(n+1)}{6}$$

$$|b_n| \leq \frac{(2n-1)(n-1)}{6}$$

$$\big||a_n| - |b_n|\big| \leq n$$

eşitsizlikleri sağlanır (Sheil-Small 1990).

1.4.5. Sonuç. Her bir $f \in SH^*$ için $n = 2,3,\cdots$ olmak üzere

$$|a_n| < \frac{2n^2+1}{3} \text{ ve } |b_n| < \frac{2n^2+1}{3}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Sheil-Small 1990).

1.4.6. Sonuç. $SH^{0,*}$ sınıfındaki her f fonksiyonu

$$|f(z)| \leq \frac{3r + r^3}{3(1-r)^3}, \quad |z| = r < 1$$

koşulunu sağlar. Eşitlik hali Harmonik Koebe fonksiyonu tarafından sağlanır (Sheil-Small 1990).

1.4.7. Teorem. $f = h + \overline{g}$ (1.8) formunda verildiği gibi olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(|a_n| + |b_n|\right) \leq 2, \ (a_1 = 1)$$

ise, *f* yön koruyan, harmonik yıldızıl bir fonksiyondur (Avcı ve Zlotkiewicz 1990)**.**

1.4.8. Teorem. $f \in KH^0$ ise $\{w : |w| < \frac{1}{2}\} \subseteq f(U)$ dur (Clunie ve Sheil-Small 1984).

1.4.9. Teorem. Her bir $f \in KH^0$ için $n = 2,3,\cdots$ olmak üzere

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2}$$
$$|b_n| \leq \frac{n-1}{2}$$
$$\big||a_n| - |b_n|\big| \leq 1$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik hali $L(z) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{1-z}\right\} + i\,\mathrm{Im}\left\{\frac{z}{(1-z)^2}\right\}$ fonksiyonu için geçerlidir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

1.4.10. Teorem. $f \in KH$ olsun. $n = 1,2,\cdots$ için

$$|a_n| \leq \frac{n-1}{2}|b_1| + \frac{n+1}{2},$$

$$|b_n| \leq \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}|b_1|$$

dir. Ayrıca, $n \geq 2$ için $|a_n| < n$ ve $|b_n| < n$ dir (Clunie ve Sheil-Small 1984).

1.4.11. Teorem. h ve g, U birim diskinde analitik olsun ve $|g'(0)|<|h'(0)|$ eşitsizliği sağlansın. Bu takdirde, $|\varepsilon|=1$ olacak şekildeki her ε için $h+\varepsilon g$ konvekse yakın bir fonksiyon ise $f=h+\overline{g}$ fonksiyonu harmonik konvekse yakın bir fonksiyon olur (Clunie ve Sheil-Small 1984).

1.4.12. Teorem. $f=h+\overline{g}$, U birim diskinde yerel yalınkat ve en az bir ε $(|\varepsilon|\leq 1)$ için $h+\varepsilon g$ konveks olsun. Bu durumda, f fonksiyonu karmonik yalınkat konvekse yakın bir fonksiyondur (Clunie ve Sheil-Small 1984).

1.4.13. Teorem. CH sınıfına ait bir $f=h+\overline{g}$ fonksiyonu için $n=1,2,3,\cdots$ olmak üzere

$$|a_n|\leq\frac{2n^2+1}{3} \text{ ve } |b_n|\leq\frac{2n^2+1}{3}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Clunie ve Sheil-Small 1984).

1.1 ve 1.2 de ele alınan S sınıfına benzer olarak, SH sınıfının da α $(0\leq\alpha<1)$ mertebeli harmonik yıldızıl $(SH^*(\alpha))$, α mertebeli harmonik konveks $(KH(\alpha))$ alt sınıfları mevcuttur. $f=h+\overline{g}$ harmonik fonksiyonunun ko-analitik kısmı olan g fonksiyonu sıfır olduğunda $SH^*(\alpha)=S^*(\alpha)$ ve $KH(\alpha)=K(\alpha)$ olur.

Benzer şekilde, $SH(n,p)$ sınıfının da çok katlı harmonik yıldızıl $(SH^*(n,p))$, α mertebeli çok katlı harmonik yıldızıl $(SH^*(n,p,\alpha))$ ve çok katlı harmonik konveks $(KH(n,p))$, α mertebeli çok katlı harmonik konveks $(KH(n,p,\alpha))$ alt sınıfları mevcuttur. Bu tanımlar altında, $SH^*(1,1,0)=SH^*(1,1)=SH^*$ ve $KH(1,1,0)=KH(1,1)=KH$ yazılabilir.

1.4.14. Teorem. $f = h + \overline{g}$ (1.10) ile verildiği gibi alınsın. Bu takdirde,

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} k\,a_k + \sum_{k=n+p-1}^{\infty} k\,b_k \leq p,\ \ (p \geq 1,\ n \in \mathrm{N})$$

İse f harmonik çok katlı fonksiyonu yön koruyandır ve $f \in SH^*(n,p)$ dir (Ahuja ve Jahangiri 2001).

2. SALAGEAN TİPİ HARMONİK FONKSİYONLAR

Kompleks mertebeli analitik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı ilk olarak Nasr ve Aouf (1985) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra bir çok yazar tarafından kompleks mertebeli yıldızıl ve konveks fonksiyonlar ele alınmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Owa (1991) kompleks mertebeli analitik yıldızıl fonksiyonlar için yaptığı bir çalışmada, sınıfa ait olan fonksiyonların sağladığı katsayı bağıntısı ile bu bağıntıyı sağlayan fonksiyonların o sınıfa ait olabileceğini göstermiştir. Ancak, bu elde ettiği sonucun yanlış olduğunu daha sonra yaptığı bir çalışmada (Owa ve Salagean 1998) ispatlamış ve ters örneklerini vermiştir. Bu çalışmasında üç farklı sınıf tanımlayarak bunlar arasındaki ilişkileri de incelemiştir. Burada ise aynı problem harmonik yalınkat fonksiyonlar için ele alınmıştır. Benzer şekilde, üç sınıf tanımlanmış ve bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Ayrıca, harmonik çok değerli fonksiyonların türev fonksiyonlarına Salagean türev operatörünün uygulanması ile oluşturulan harmonik çok değerli fonksiyonların yeni bir sınıfı tanımlanmış ve bu sınıfın katsayı koşulları ve komşulukları araştırılmıştır.

2.1. Giriş

$f \in A$ olmak üzere

$$D^0 f(z) = f(z)$$

$$D^1 f(z) = zf'(z) \tag{2.1}$$

$$\vdots$$

$$D^m f(z) = D^1(D^{m-1} f(z)) \quad (m \in \mathbb{N}) \tag{2.2}$$

ile verilen türev operatörü Salagean (1983) tarafından tanımlanmıştır. (2.1) ve (2.2) den

$$D^m f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^m a_k z^k$$

olduğu kolayca görülür.

$f = h + \overline{g} \in SH$ için, Jahangiri ve ark. (2002) modifiye edilmiş Salagean türev operatörünü

$$D^m h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^m a_k z^k \quad \text{ve} \quad D^m g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^m b_k z^k$$

olmak üzere,

$$D^m f(z) = D^m h(z) + (-1)^m \overline{D^m g(z)}$$

ile tanımladı.

SH sınıfına ait olan ve $f_m = h + \overline{g_m}$ harmonik fonksiyonlarından oluşan alt sınıf $\overline{SH}$ ile gösterilsin. Burada, h ve g_m

$$h(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k,\; g_m(z) = (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k, \quad a_k,\, b_k \geq 0 \tag{2.3}$$

formundadır.

2.1.1. Lemma.

(i) $\operatorname{Re} w > 0$ olması için gerek ve yeter şart $|1+w| > |1-w|$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

(ii) $\operatorname{Re}\left\{\frac{A(z)}{B(z)}\right\} \geq \gamma$ olması için gerek ve yeter şart

$$\left|(1-\gamma)B(z)+A(z)\right|-\left|(1+\gamma)B(z)-A(z)\right|\geq 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

2.2. $\overline{SH}(m,b)$, $\overline{SH}_1(m,b)$ ve $\overline{SH}_2(m,b)$ Sınıfları

$\overline{SH}(m,b)$,

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{b}\left(\frac{D^{m+1}f(z)}{D^m f(z)}-1\right)\right\}>0,\quad b\in\mathbb{C}\backslash\{0\} \tag{2.4}$$

özelliğini sağlayan (2.3) ile verilen $f_m=h+\overline{g}_m\in\overline{SH}$ fonksiyonlarından oluşan $\overline{SH}$ sınıfının bir alt sınıfını göstersin. $\overline{SH_1}(m,b)$ sınıfı,

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^m\left(2\left[k-1+|b|\right]a_k+\left[k+1+|k+1-2b|\right]b_k\right)\leq 4|b| \tag{2.5}$$

özelliğini sağlayan $f_m=h+\overline{g}_m\in\overline{SH}$ fonksiyonlarından oluşan $\overline{SH}$ sınıfının bir alt sınıfını göstersin. $\overline{SH_2}(m,b)$ sınıfı,

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^m\left(\left[(k-1)\frac{\operatorname{Re}b}{|b|}+|b|\right]a_k+\left[(k+1)\frac{\operatorname{Re}b}{|b|}-|b|\right]b_k\right)\leq 2|b| \tag{2.6}$$

özelliğini sağlayan $f_m=h+\overline{g}_m\in\overline{SH}$ fonksiyonlarından oluşan $\overline{SH}$ sınıfının bir alt sınıfını göstersin.

$\overline{SH}(m,b)$ sınıfı için; m yerine 0 ve b yerine $1-\alpha$ alınırsa α mertebeli harmonik yıldızıl fonksiyon sınıfı olan $SH^*(\alpha)$ ve m yerine 1 ve b yerine $1-\alpha$ alınırsa α mertebeli harmonik konveks fonksiyon sınıfı olan $KH(\alpha)$ elde edilir.

(2.3) formundaki $f_m = h + \overline{g}_m$ fonksiyonunun ko-analitik kısmı sıfıra özdeş iken $\overline{SH}(m,b)$, $\overline{SH_1}(m,b)$ ve $\overline{SH_2}(m,b)$ sınıflarına ait olan m ile b parametrelerinin özel halleri için daha önce çeşitli yazarlar tarafından çalışılmış olan aşağıdaki alt sınıflar elde edilir:

(i) $\overline{SH}(0,1-\alpha) = T^*(\alpha)$, $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere α mertebeli yıldızıl fonksiyon sınıfı (Silverman 1975),

(ii) $\overline{SH}(1,1-\alpha) = C(\alpha)$, $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere α mertebeli konveks fonksiyon sınıfı (Silverman 1975),

(ii) $\overline{SH}(0,b) = S^*(b)$, $b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ olmak üzere b kompleks mertebeli yıldızıl fonksiyon sınıfı (Nasr ve Aouf 1985),

(iii) $\overline{SH}(1,b) = C(b)$, $b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ olmak üzere b kompleks mertebeli konveks fonksiyon sınıfı (Wiatrowski 1971),

(iv) $\overline{SH}(0,b) = T_n^*(b)$, $\overline{SH_1}(0,b) = O_n^*(b)$, $\overline{SH_2}(0,b) = P_n^*(b)$ (Owa ve Salagean 1998),

(v) $\overline{SH}(m,b) = T_{n,m}(b)$, $\overline{SH_1}(m,b) = O_{n,m}(b)$, $\overline{SH_2}(m,b) = P_{n,m}(b)$ (Owa ve Salagean 1998).

2.2.1. Teorem. $\overline{SH_1}(m,b) \subseteq \overline{SH}(m,b)$ dir.

İspat. $f \in \overline{SH_1}(m,b)$ olsun. $f \in \overline{SH}$ için (2.5) koşulu sağlanıyorken

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{(b-1)D^m f(z) + D^{m+1} f(z)}{b D^m f(z)}\right\} > 0, \quad b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

olduğu gösterilmelidir. Lemma 2.1.1 (i) nin kullanılmasıyla,

$$|(2b-1)D^m f(z) + D^{m+1} f(z)| - |D^m f(z) - D^{m+1} f(z)| > 0 \tag{2.7}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $D^m f(z)$ ve $D^{m+1} f(z)$ nin (2.7) de yerine yazılmasıyla

$$\left|2bz-\sum_{k=2}^{\infty}k^{m}(k-1+2b)a_{k}z^{k}+(-1)^{m}\sum_{k=1}^{\infty}k^{m}(2b-1-k)b_{k}\overline{z}^{k}\right|$$
$$-\left|\sum_{k=2}^{\infty}k^{m}(k-1)a_{k}z^{k}+(-1)^{2m}\sum_{k=1}^{\infty}k^{m}(k+1)b_{k}\overline{z}^{k}\right|$$
$$\geq 2|b||z|-\sum_{k=2}^{\infty}k^{m}(k-1+2|b|)a_{k}|z|^{k}-\sum_{k=1}^{\infty}k^{m}|k+1-2b|b_{k}|z|^{k}$$
$$-\sum_{k=2}^{\infty}k^{m}(k-1)a_{k}|z|^{k}-\sum_{k=1}^{\infty}k^{m}(k+1)b_{k}|z|^{k}$$
$$>2|b|-2\sum_{k=2}^{\infty}k^{m}(k-1+|b|)a_{k}-\sum_{k=1}^{\infty}k^{m}(k+1+|k+1-2b|)b_{k}\geq 0$$

elde edilir.

2.2.2. Teorem. $\overline{SH}(m,b)\subseteq\overline{SH_{2}}(m,b)$ dir.

İspat. $f\in\overline{SH}(m,b)$ olsun. (2.4) gereği

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{b}\left(\frac{-\sum_{k=2}^{\infty}k^{m}(k-1)a_{k}z^{k}-(-1)^{2m}\sum_{k=1}^{\infty}k^{m}(k+1)b_{k}\overline{z}^{k}}{z-\sum_{k=2}^{\infty}k^{m}a_{k}z^{k}+(-1)^{2m}\sum_{k=1}^{\infty}k^{m}b_{k}\overline{z}^{k}}\right)\right\}>-1$$

dir. z reel eksen üzerinden seçilirse ve $z\to 1^{-}$ için

$$\frac{\sum_{k=2}^{\infty}k^{m}(k-1)a_{k}+\sum_{k=1}^{\infty}k^{m}(k+1)b_{k}}{1-\sum_{k=2}^{\infty}k^{m}a_{k}+\sum_{k=1}^{\infty}k^{m}b_{k}}\frac{\operatorname{Re}b}{|b|^{2}}\leq 1$$

elde edilir. Dolayısıyla, (2.6) ya denk olan

$$\sum_{k=2}^{\infty}k^{m}(k-1)a_{k}+\sum_{k=1}^{\infty}k^{m}(k+1)b_{k}\leq\frac{|b|^{2}}{\operatorname{Re}b}\left(1-\sum_{k=2}^{\infty}k^{m}a_{k}+\sum_{k=1}^{\infty}k^{m}b_{k}\right)$$

eşitsizliği bulunur. Böylece, $f \in \overline{SH_2}(m,b)$ dir.

2.2.3. Teorem. $b \in (0,1]$ ise $\overline{SH_1}(m,b) = \overline{SH}(m,b) = \overline{SH_2}(m,b)$ dir.

İspat. $b \in (0,1]$ olarak seçildiğinde (2.4) ve (2.5) eşitsizlikleri denk hale gelir. Dolayısıyla, $\overline{SH_1}(m,b) = \overline{SH_2}(m,b)$ olur. Teorem 2.2.1 ve Teorem 2.2.2 yi kullanarak, üç sınıfın da birbirine eşit olduğu görülür.

2.2.4. Teorem $b \in [-\infty,0)$ veya $\operatorname{Re} b \in (-1/2,0)$ ise $\overline{SH_2}(m,b) \not\subseteq \overline{SH}(m,b)$ dir.

İspat. i) $b \in [-1,0)$ alınsın.

$$f_\alpha(z) = z - \alpha \frac{z^2}{2^m} \tag{2.8}$$

ve $\alpha > 0$ olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m \left[(k-1)\frac{\operatorname{Re} b}{|b|} + |b| \right] a_k = -b + (-(b+1)\alpha) < 2|b| \tag{2.9}$$

dir ve dolayısıyla $f_\alpha(z) \in \overline{SH_2}(m,b)$ dir.

$$F(z) = 1 + \frac{1}{b}\left(\frac{D^{m+1} f_\alpha(z)}{D^m f_\alpha(z)} - 1 \right), \ z \in U$$

olsun. Bu takdirde, basit bir hesaplama ve

$$D^m f_\alpha(z) = z - 2^m \alpha 2^{-m} z^2 = z - \alpha z^2$$

olduğundan

$$F(z) = 1 + \frac{\alpha z}{b(\alpha z - 1)} = 1 + \varphi(z)$$

elde edilir. Burada,

$$\varphi(z) = \frac{\alpha z}{b(\alpha z - 1)} \tag{2.10}$$

dir. $\alpha > 1$ için, D diskinin merkezi

$$c = \frac{\alpha^2}{b(\alpha^2 - 1)} \tag{2.11}$$

ve yarıçapı

$$\rho = \frac{\alpha}{b(1 - \alpha^2)} \tag{2.12}$$

olmak üzere $\varphi(U) = \mathbb{C}_\infty - D(c, \rho)$ dur. $F(U) = \mathbb{C}_\infty - D(c+1, \rho)$ dur ve her $z \in U$ için $\operatorname{Re} F(z) > 0$ eşitsizliğinin sağlanmadığı görülür. Böylece $\alpha > 1$ için $f_\alpha(z) \notin \overline{SH}(m,b)$ olduğu elde edilir ve bu durumda $\overline{SH_2}(m,b) \not\subset \overline{SH}(m,b)$ dir.

ii) $b \in (-\infty, -1)$ alınsın. $\alpha \in \left(1, \frac{b}{1+b}\right)$ olmak üzere, (2.8) de tanımlanan $f_\alpha(z)$ ele alınsın. Bu durumda, (2.9) eşitsizliği tekrar sağlanır ve bu durum $f_\alpha(z) \in \overline{SH_2}(m,b)$ olduğunu gösterir. Ancak, i) ye benzer şekilde $f_\alpha(z) \notin \overline{SH}(m,b)$ olduğu elde edilir.

iii) $\operatorname{Re} b \in (-1/2, 0)$ ve $f_1(z) = z - 2^{-m} z^2$ olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m \left[(k-1) \frac{\operatorname{Re} b}{|b|} + |b| \right] a_k = 2|b| + \operatorname{Re} b / |b| \le 2|b|$$

eşitsizliği $\operatorname{Re} b < 0$ olduğunda her b için sağlandığından $f_1 \in \overline{SH_2}(m,b)$ dir.

Diğer taraftan $r = \operatorname{Re} b < 0$ ve s, $1 + 2r(1-s) > 0$ ile verilen bir negatif reel sayı olsun. Ayrıca, z_0

$$z = \frac{b(1-s)}{1+b(1-s)}$$

denkleminin bir kökü olarak seçilirse, $z_0 \in U$ dur ve f_1 için

$$1 + \frac{1}{b}\left(\frac{D^{m+1} f_1(z_0)}{D^m f_1(z_0)} - 1\right) = s < 0$$

elde edilir. Böylece, $f_1 \notin \overline{SH}(m,b)$ dir.

2.2.5. Teorem. $b \in (-\infty, 0)$ veya $b \in (1,\infty)$ ise, $\overline{SH}(m,b) \not\subseteq \overline{SH_1}(m,b)$ dir.

İspat. i) $b \in (-\infty, 0)$ ve $\alpha > |b|/(1+|b|)$ olmak üzere, f_α (2.8) ile belirtildiği gibi alınsın. Bu takdirde,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m \left[2(k-1+(1+|b|))\right] a_k = 2(|b| + (1+(1+|b|)\alpha) > 4(1+|b|) \tag{2.13}$$

dir ve $m \in \mathrm{N}_0$ ile $b \in (-\infty, 0)$ için $f_\alpha \notin \overline{SH_1}(m,b)$ dir. φ, (2.10) ile verildiği gibi olmak üzere,

$$F(z) = 1 + \frac{1}{b}\left(\frac{D^{m+1} f_\alpha(z)}{D^m f_\alpha(z)} - 1\right) = 1 + \varphi(z)$$

bulunur. c, (2.11) ve ρ, (2.12) ile verildiği gibi olmak üzere, $\varphi(U) = D(c,\rho)$ dan

$$\operatorname{Re} F(z) \geq \frac{(1+b)\alpha+b}{b(\alpha+1)} \tag{2.14}$$

elde edilir. Eğer $b \in (-\infty,-1)$ ve $\alpha \in \left(\frac{|b|}{1+|b|},1\right)$ ise

$$\frac{(1+b)\alpha+b}{b(\alpha+1)} > 0 \tag{2.15}$$

ve eğer $b \in (-1,0)$ ve $\alpha \in \left(\frac{|b|}{1+|b|},\frac{|b|}{|1-|b||}\right) \cap (0,1)$ ise (2.13) yine sağlanır. (2.15) ve (2.14) ün birleştirilmesiyle ve $\overline{SH}(m,b)$ nin tanımından

$$\alpha \in \left(\frac{|b|}{1+|b|},\frac{|b|}{|1-|b||}\right) \cap (0,1) \text{ ve } b \in (-\infty,0) \text{ için } f_\alpha \in \overline{SH}(m,b)$$

elde edilir.

ii) $b \in (1,\infty)$ alınsın. $\alpha \in \left(\frac{b}{1+b},1\right)$ için, (2.8) ile tanımlanan f_α fonksiyonu ele alınsın. Bu durumda, (2.13) eşitsizliği yine sağlanır ve bu $f_\alpha \notin \overline{SH_1}(m,b)$ olduğu anlamına gelir. Ayrıca, $\alpha \in \left(\frac{b}{1+b},1\right)$ için $f_\alpha \in \overline{SH}(m,b)$ elde edilir.

2.3. $SH^m_{n,p}(q,\lambda,\alpha)$ ve $\overline{SH}^m_{n,p}(q,\lambda,\alpha)$ Sınıfları

Bir $f = h + \overline{g} \in SH(n,p)$ harmonik çok değerli fonksiyonunun q. mertebeden türevi $f^{(q)}$ ile gösterilsin. $f^{(q)}$; $p > q$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in U$ ve

$$h^{(q)}(z) = \frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} a_k z^{k-q}$$

ile

$$g^{(q)}(z)=\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\frac{k!}{(k-q)!}b_k\ z^{k-q}$$

olmak üzere,

$$f^{(q)}(z)=h^{(q)}(z)+\overline{g^{(q)}(z)}$$

ile tanımlansın.

$f^{(q)}$ harmonik fonksiyonunun Salagean türevi ise,

$$D^m h^{(q)}(z)=\frac{(p-q)^m}{(p-q)!}p!\,z^{p-q}+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{(k-q)^m}{(k-q)!}k!\,a_k\ z^{k-q}$$

ve

$$D^m g^{(q)}(z)=\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\frac{(k-q)^m}{(k-q)!}k!\,b_k\ z^{k-q},$$

$m\in\mathbb{N}_0,\ z\in U$ olmak üzere,

$$D^m f^{(q)}(z)=D^m h^{(q)}(z)+(-1)^m\ \overline{D^m g^{(q)}(z)} \qquad (2.16)$$

ile tanımlanır.

(2.16) dan,

$$D^0 f^{(0)}(z)=h(z)+\overline{g(z)}$$
$$D^0 f^{(1)}(z)=h'(z)+\overline{g'(z)}$$
$$D^1 f^{(0)}(z)=zh'(z)-\overline{zg'(z)}$$

olduğu açıktır.

Kısalık için, $i = p,\ k,\ n+p,\ n+p-1$ ve $j = m,\ m+1$ olmak üzere $\dfrac{(i-q)^j}{(i-q)!}(i)!$ yerine q_i^j kullanılacaktır.

$f \in SH(n,p)$ ve $0 \le \lambda \le 1$ için,

$$F(z) = (1-\lambda)D^m f^{(q)}(z) + \lambda D^{m+1} f^{(q)}(z) = H(z) + \overline{G(z)}$$

olsun. Burada H ve G

$$H(z) = [1-\lambda+\lambda(p-q)]\, q_p^m\, z^{p-q} + \sum_{k=n+p}^{\infty} [1-\lambda+\lambda(k-q)]\, q_k^m\, a_k\, z^{k-q},$$
$$G(z) = (-1)^m \sum_{k=n+p-1}^{\infty} [(1-\lambda)-\lambda(k-q)]\, q_k^m\, b_k\, z^{k-q} \tag{2.17}$$

formundadır.

$SH_{n,p}^m(q,\lambda,\alpha)$; H ve G (2.17) ile verildiği gibi olmak üzere, $f = h + \overline{g} \in SH(n,p)$ fonksiyonlarından oluşan ve $0 \le \alpha < 1$, $p > q$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{zH'(z) - \overline{zG'(z)}}{H(z) + \overline{G(z)}} \right\} > \alpha(p-q) \tag{2.18}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfı olsun.

$SH(n,p)$ nin alt sınıfı olan $\overline{SH}(n,p)$;

$$h(z) = z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k z^k,\quad g_m(z) = (-1)^m \sum_{k=n+p-1}^{\infty} b_k z^k,\ a_k, b_k \ge 0 \tag{2.19}$$

formundaki h ve g_m ile verilen $f_m = h + \overline{g_m}$ fonksiyonlarının sınıfı olsun.

$\overline{SH}_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha) := SH_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha) \cap \overline{SH}(n,p)$ ile tanımlansın.

$SH_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha)$ ve $\overline{SH}_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha)$ sınıflarına ait parametrelerin özel seçimi ile daha önce çalışılmış olan aşağıdaki sınıflar elde edilir:

(i) $SH_{1,1}^{0}(0,0,0) \equiv SH^{*}$, U da yön koruyan yıldızıl harmonik yalınkat fonksiyon sınıfı (Silverman 1998, Silverman ve Silvia 1999),

(ii) $\overline{SH}_{1,1}^{0}(0,0,\alpha) \equiv SH^{*}(\alpha)$, U da yön koruyan α mertebeli yıldızıl harmonik yalınkat fonksiyon sınıfı (Jahangiri 1998, 1999),

(iii) $\overline{SH}_{1,1}^{1}(0,0,\alpha) \equiv HK(\alpha)$, U da yön koruyan α mertebeli konveks harmonik yalınkat fonksiyon sınıfı (Jahangiri 1998, 1999),

(iv) $\overline{SH}_{1,p}^{0}(0,0,0) \equiv SH^{*}(p)$, U da yön koruyan yıldızıl harmonik çok katlı fonksiyon sınıfı (Ahuja 2001),

(v) $\overline{SH}_{1,1}^{m}(0,0,\alpha) \equiv \overline{H}(m,\alpha)$, U da yön koruyan Salagean tipi harmonik yalınkat fonksiyon sınıfı (Jahangiri ve ark. 2002),

(vi) $\overline{SH}_{1,1}^{m}(0,0,\alpha) \equiv \overline{S}_{H}(m+1,m;\alpha)$ (Yalçın 2005) elde edilir.

(1.10) ile verilen $f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun ko-analitik kısmı sıfıra özdeş olsun. $\overline{SH}_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha)$ sınıfına ait parametreler özel olarak seçilirse daha önce çalışılmış olan aşağıdaki sınıflar elde edilir:

(i) $\overline{SH}_{n,p}^{m}(q,0,\alpha) \equiv S_{n,p}^{m}(q,(1-\alpha)(p-q),1)$ (Frasin 2007),

(ii) $\overline{SH}_{n,p}^{0}(q,0,\alpha) \equiv S_{n,p}^{q}(0,1,(1-\alpha)(p-q))$ (Altıntaş 2008).

2.3.1. Teorem. $f = h + \overline{g}$ (1.10) ile verildiği gibi olsun.

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{[k-q-\alpha(p-q)]\,[1-\lambda+\lambda(k-q)]}{\left([(1-\alpha)(p-q)+1]-|(1-\alpha)(p-q)-1|\right)[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m} | a_k |$$

$$+ \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \frac{[k-q+\alpha(p-q)]\,|(1-\lambda)-\lambda(k-q)|}{\left([(1-\alpha)(p-q)+1]-|(1-\alpha)(p-q)-1|\right)[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m} | b_k | \le \frac{1}{2}$$

$$(0 \le \alpha < 1,\ \ p > q\,,\ p \in \mathbb{N}\,, q \in \mathbb{N}_0\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ z \in U\,) \tag{2.20}$$

ise, f birim diskte yön koruyan harmonik çok katlı bir fonksiyondur ve $f \in SH_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha)$ dır.

İspat. $f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun katsayıları (2.20) eşitsizliğini sağlıyor ise Teorem 1.4.14 gereği *f*, birim diskte yön koruyan bir harmonik çok katlı fonksiyondur. (2.18) den

$$w = \frac{zH'(z) - \overline{zG'(z)} - \alpha(p-q)\left[H(z) + \overline{G(z)}\right]}{H(z) + \overline{G(z)}} := \frac{A(z)}{B(z)}$$

olmak üzere, $\operatorname{Re}\{w\} > 0$ olduğu gösterilmelidir. Lemma 2.1.1 (ii) kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
&| A(z) + B(z) | - | A(z) - B(z) | \\
&\ge \left([(1-\alpha)(p-q)+1]-|(1-\alpha)(p-q)-1|\right)[1-\lambda+\lambda(p-q)]\, q_p^m \ | z |^{p-q} \\
&- \sum_{k=n+p}^{\infty} 2[k-q-\alpha(p-q)]\,[1-\lambda+\lambda(k-q)]\, q_k^m \ | a_k | \, | z |^{k-q} \\
&- \sum_{k=n+p-1}^{\infty} 2[k-q+\alpha(p-q)]\, |(1-\lambda)-\lambda(k-q)|\, q_k^m \, | b_k | \, | z |^{k-q}
\end{aligned}$$

$$> \left(\left[(1-\alpha)(p-q)+1 \right] - |(1-\alpha)(p-q)-1| \right) \left[1-\lambda+\lambda(p-q) \right] q_p^m |z|^{p-q}$$

$$\times \left\{ 1 - \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{2[k-q-\alpha(p-q)][1-\lambda+\lambda(k-q)]}{\left([(1-\alpha)(p-q)+1] - |(1-\alpha)(p-q)-1| \right)[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m} |a_k| \right.$$

$$\left. - \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \frac{2(k-q+\alpha(p-q))|(1-\lambda)-\lambda(k-q)|}{\left([(1-\alpha)(p-q)+1] - |(1-\alpha)(p-q)-1| \right)[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m} |b_k| \right\}$$

elde edilir. Son ifade (2.20) gereği negatif olamayacağından $f \in SH_{n,p}^m(q,\lambda,\alpha)$ dır. □

2.3.2. Sonuç. $\lambda < \frac{1}{n+p-q}$ ve $\alpha \geq 1 - \frac{1}{p-q}$ olmak üzere,

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{[k-q-\alpha(p-q)][1-\lambda+\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m} |a_k|$$

$$+ \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \frac{[k-q+\alpha(p-q)][(1-\lambda)-\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m} |b_k| \leq (1-\alpha)(p-q)$$

$$\left(0 \leq \alpha < 1,\ p > q, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}_0 \right)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise $f \in SH_{n,p}^m(q,\lambda,\alpha)$ dır.

2.3.3. Sonuç. $\lambda < \frac{1}{n+p-q}$ ve $\alpha \leq 1 - \frac{1}{p-q}$ olmak üzere,

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{[k-q-\alpha(p-q)][1-\lambda+\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m} |a_k|$$

$$+ \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \frac{[k-q+\alpha(p-q)][(1-\lambda)-\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m} |a_k| \leq 1$$

$$\left(0 \leq \alpha < 1,\ p > q, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}_0 \right)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise $f \in SH_{n,p}^m(q,\lambda,\alpha)$ dır.

2.3.4. Teorem. $f_m = h + \overline{g_m}$ fonksiyonu (2.19) formunda olsun ve $\lambda < \frac{1}{n+p-q}$ alınsın. Bu takdirde,

(i) $\alpha \geq 1-\frac{1}{p-q}$ ise, $f_m \in \overline{SH}^m_{n,p}(q,\lambda,\alpha)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{[k-q-\alpha(p-q)][1-\lambda+\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m} a_k$$

$$+\sum_{k=n+p-1}^{\infty} \frac{[k-q+\alpha(p-q)][(1-\lambda)-\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m} b_k \leq (1-\alpha)(p-q), \tag{2.21}$$

(ii) $\alpha \leq 1-\frac{1}{p-q}$ ise, $f_m \in \overline{SH}^m_{n,p}(q,\lambda,\alpha)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{[k-q-\alpha(p-q)][1-\lambda+\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m} a_k$$

$$+\sum_{k=n+p-1}^{\infty} \frac{[k-q+\alpha(p-q)][(1-\lambda)-\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m} b_k \leq 1 \tag{2.22}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. Yeter koşul $\overline{SH}^m_{n,p}(q,\lambda,\alpha) \subset SH^m_{n,p}(q,\lambda,\alpha)$ olduğundan Teorem 2.3.1, Sonuç 2.3.2, Sonuç 2.3.3 den görülür. Gerek koşul için, (2.22) sağlanmadığında, $f_m \notin \overline{SH}^m_{n,p}(q,\lambda,\alpha)$ olduğu gösterilmelidir.

(2.19) ile verilen bir harmonik çok katlı $f_m = h+\overline{g_m}$ fonksiyonunun $\overline{SH}^m_{n,p}(q,\lambda,\alpha)$ sınıfına ait olması için gerekli ve yeterli koşul (2.18) koşulunun sağlanmasıdır. O halde,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{(1-\alpha)(p-q)z^{p-q}-\sum_{k=n+p}^{\infty}[k-q-\alpha(p-q)]\frac{[1-\lambda+\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^m}{q_p^m}a_k z^{k-q}}{z^{p-q}-\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{[1-\lambda+\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^m}{q_p^m}a_k z^{k-q}+(-1)^{2m}\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\frac{[1-\lambda-\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^m}{q_p^m}b_k \overline{z}^{k-q}}\right.$$

$$\left.-\frac{(-1)^{2m}\sum_{k=n+p-1}^{\infty}[k-q+\alpha(p-q)]\frac{[1-\lambda-\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^{m+1}}{q_p^m}b_k \overline{z}^{k-q}}{z^{p-q}-\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{[1-\lambda+\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^m}{q_p^m}a_k z^{k-q}+(-1)^{2m}\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\frac{[1-\lambda-\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^m}{q_p^m}b_k \overline{z}^{k-q}}\right\}\geq 0 \tag{2.23}$$

yazılabilir. (2.23) koşulu $|z|=r<1$ şeklindeki her z için sağlanmalıdır. z değerleri $0\leq z=r<1$ şeklindeki pozitif reel eksen üzerinden seçilirse,

$$\frac{(1-\alpha)(p-q)-\sum_{k=n+p}^{\infty}[k-q-\alpha(p-q)]\frac{[1-\lambda+\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^m}{q_p^m}a_k r^{k-p}}{1-\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{[1-\lambda+\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^m}{q_p^m}a_k r^{k-p}+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\frac{[1-\lambda-\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^m}{q_p^m}b_k r^{k-p}}$$

$$-\frac{\sum_{k=n+p-1}^{\infty}[k-q+\alpha(p-q)]\frac{[1-\lambda-\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^{m+1}}{q_p^m}b_k r^{k-p}}{1-\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{[1-\lambda+\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^m}{q_p^m}a_k r^{k-p}+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\frac{[1-\lambda-\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^m}{q_p^m}b_k r^{k-p}}\geq 0 \tag{2.24}$$

elde edilir. (2.22) koşulu sağlanmıyor ise (i) veya (ii) durumları gereği (2.24) ün payı $r\to 1^-$ için negatif olur. Dolayısıyla, $(0,1)$ aralığında (2.24) deki kesri negatif yapan bir $z_0=r_0$ değeri vardır. Bu durum $f_m\in\overline{SH}_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha)$ ile çelişeceğinden ispat tamamlanır. □

2.3.5. Teorem. $f_m\in\overline{SH}_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha)$ ve $\lambda<\frac{1}{n+p-q}$ olsun. Bu takdirde, $|z|=r<1$ olmak üzere,

(i) $\alpha\geq 1-\frac{1}{p-q}$ için

$$|f_m(z)| \leq \left(1+b_{n+p-1}\right)r^p + \left(\frac{\left(p-q\right)\left(1-\alpha\right)\left(1-\lambda+\lambda\left(p-q\right)\right)q_p^m}{\left(n+(1-\alpha)(p-q)\right)\left(\left(1-\lambda\right)-\lambda\left(n+p-q\right)\right)q_{n+p}^m}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(n-1+(1+\alpha)\left(p-q\right)\right)\left(1-\lambda\left(n+p-q\right)\right)q_{n+p-1}^m}{\left(n+(1-\alpha)(p-q)\right)\left(\left(1-\lambda\right)-\lambda\left(n+p-q\right)\right)q_{n+p}^m}b_{n+p-1}\right)r^{n+p},$$

ve

$$|f_m(z)| \geq \left(1-b_{n+p-1}\right)r^p - \left(\frac{\left(p-q\right)\left(1-\alpha\right)\left(1-\lambda+\lambda\left(p-q\right)\right)q_p^m}{\left(n+(1-\alpha)(p-q)\right)\left(\left(1-\lambda\right)-\lambda\left(n+p-q\right)\right)q_{n+p}^m}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(n-1+(1+\alpha)\left(p-q\right)\right)\left(1-\lambda\left(n+p-q\right)\right)q_{n+p-1}^m}{\left(n+(1-\alpha)(p-q)\right)\left(\left(1-\lambda\right)-\lambda\left(n+p-q\right)\right)q_{n+p}^m}b_{n+p-1}\right)r^{n+p},$$

(ii) $\alpha \leq 1-\frac{1}{p-q}$ için,

$$|f_m(z)| \leq \left(1+b_{n+p-1}\right)r^p + \left(\frac{\left(1-\lambda+\lambda\left(p-q\right)\right)q_p^m}{\left(n+(1-\alpha)(p-q)\right)\left(\left(1-\lambda\right)-\lambda\left(n+p-q\right)\right)q_{n+p}^m}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(n-1+(1+\alpha)\left(p-q\right)\right)\left(1-\lambda\left(n+p-q\right)\right)q_{n+p-1}^m}{\left(n+(1-\alpha)(p-q)\right)\left(\left(1-\lambda\right)-\lambda\left(n+p-q\right)\right)q_{n+p}^m}b_{n+p-1}\right)r^{n+p},$$

ve

$$|f_m(z)| \geq \left(1-b_{n+p-1}\right)r^p - \left(\frac{\left(1-\lambda+\lambda\left(p-q\right)\right)q_p^m}{\left(n+(1-\alpha)(p-q)\right)\left(\left(1-\lambda\right)-\lambda\left(n+p-q\right)\right)q_{n+p}^m}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(n-1+(1+\alpha)\left(p-q\right)\right)\left(1-\lambda\left(n+p-q\right)\right)q_{n+p-1}^m}{\left(n+(1-\alpha)(p-q)\right)\left(\left(1-\lambda\right)-\lambda\left(n+p-q\right)\right)q_{n+p}^m}b_{n+p-1}\right)r^{n+p}$$

dir.

İspat. (i) Burada sadece eşitsizliğin sağ tarafının ispatı verilecektir. Eşitsizliğin sol tarafının ispatı da benzer şekilde yapılabilir. $f_m \in \overline{SH}_{n,p}^m(q,\lambda,\alpha)$ olsun. f_m

fonksiyonunun mutlak değeri alınıp Teorem 2.3.4 (i) kullanıldığında,

$$
\begin{aligned}
|f_m(z)| &\leq \left(1+b_{n+p-1}\right)r^p + \sum_{k=n+p}^{\infty}\left(a_k+b_k\right)r^k \\
&\leq \left(1+b_{n+p-1}\right)r^p + \sum_{k=n+p}^{\infty}\left(a_k+b_k\right)r^{n+p} \\
&= \left(1+b_{n+p-1}\right)r^p + \frac{\left[1-\lambda+\lambda(p-q)\right]q_p^m}{\left[n+(1-\alpha)(p-q)\right]\left[(1-\lambda)-\lambda(n+p-q)\right]q_{n+p}^m} \\
&\quad \times \sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{\left[n+(1-\alpha)(p-q)\right]\left[(1-\lambda)-\lambda(n+p-q)\right]q_{n+p}^m}{\left[1-\lambda+\lambda(p-q)\right]q_p^m}\left(a_k+b_k\right)r^{n+p} \\
&\leq \left(1+b_{n+p-1}\right)r^p + \frac{\left[1-\lambda+\lambda(p-q)\right]q_p^m}{\left[n+(1-\alpha)(p-q)\right]\left[(1-\lambda)-\lambda(n+p-q)\right]q_{n+p}^m} \\
&\quad \times \sum_{k=n+p}^{\infty}\left(\frac{\left[k-q-\alpha(p-q)\right]\left[(1-\lambda)+\lambda(k-q)\right]q_k^m}{\left[1-\lambda+\lambda(p-q)\right]q_p^m}a_k\right. \\
&\quad \left.+\frac{\left[k-q+\alpha(p-q)\right]\left[(1-\lambda)-\lambda(k-q)\right]q_k^m}{\left[1-\lambda+\lambda(p-q)\right]q_p^m}b_k\right)r^{n+p} \\
&\leq \left(1+b_{n+p-1}\right)r^p + \left(\frac{(p-q)(1-\alpha)\left[1-\lambda+\lambda(p-q)\right]q_p^m}{\left[n+(1-\alpha)(p-q)\right]\left[(1-\lambda)-\lambda(n+p-q)\right]q_{n+p}^m}\right. \\
&\quad \left.-\frac{\left[n-1+(1+\alpha)(p-q)\right]\left[1-\lambda(n+p-q)\right]q_{n+p-1}^m}{\left[n+(1-\alpha)(p-q)\right]\left[(1-\lambda)-\lambda(n+p-q)\right]q_{n+p}^m}b_{n+p-1}\right)r^{n+p}
\end{aligned}
$$

bulunur. (ii) durumunun ispatı da benzer şekilde verilebilir. □

Sıradaki kapsama sonucu, Teorem 2.3.5 in (i) ve (ii) durumlarında verilen eşitsizliklerin sol taraflarından elde edilir.

2.3.6. Sonuç. $f_m \in \overline{SH}_{n,p}^m(q,\lambda,\alpha)$ ve $\lambda < \frac{1}{n+p-q}$ olsun. Bu takdirde,

(i) $\alpha \geq 1-\frac{1}{p-q}$ için

$$\left\{w : |w| < \left[1 - \frac{(p-q)(1-\alpha)[1-\lambda+\lambda(p-q)]q_p^m}{[n+(1-\alpha)(p-q)]\,[(1-\lambda)-\lambda(n+p-q)]q_{n+p}^m}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{[n+(1-\alpha)(p-q)]\,[(1-\lambda)-\lambda(n+p-q)]q_{n+p}^m + [n-1+(1+\alpha)(p-q)]\,[1-\lambda(n+p-q)]q_{n+p-1}^m}{[n+(1-\alpha)(p-q)]\,[(1-\lambda)-\lambda(n+p-q)]q_{n+p}^m} b_{n+p-1}\right]\right\}$$

$$\subset f(U),$$

(ii) $\alpha \leq 1 - \frac{1}{p-q}$ için

$$\left\{w : |w| < \left[1 - \frac{[1-\lambda+\lambda(p-q)]q_p^m}{[n+(1-\alpha)(p-q)]\,[(1-\lambda)-\lambda(n+p-q)]q_{n+p}^m}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{[n+(1-\alpha)(p-q)]\,[(1-\lambda)-\lambda(n+p-q)]q_{n+p}^m + [n-1+(1+\alpha)(p-q)]\,[1-\lambda(n+p-q)]q_{n+p-1}^m}{[n+(1-\alpha)(p-q)]\,[(1-\lambda)-\lambda(n+p-q)]q_{n+p}^m} b_{n+p-1}\right]\right\}$$

$$\subset f(U)$$

dur.

2.3.7. Teorem. $\lambda < \frac{1}{n+p-q}$ olsun. Bu takdirde, $f_m \in \overline{SH}^m_{n,p}(q,\lambda,\alpha)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$f_m(z) = \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \left(x_k h_k(z) + y_k g_{m_k}(z)\right)$$

olmasıdır. Burada,

$$h_{n+p-1}(z) = z^p,$$

$k = n+p, n+p+1, \ldots$ için

$$h_k(z)=\begin{cases} z^p-\dfrac{(p-q)(1-\alpha)\,[1-\lambda+\lambda(p-q)]}{[k-q-\alpha(p-q)]\,[1-\lambda+\lambda(k-q)]}\dfrac{q_p^m}{q_k^m}z^k;\ \alpha\geq 1-\frac{1}{p-q} \\ z^p-\dfrac{[1-\lambda+\lambda(p-q)]}{[k-q-\alpha(p-q)]\,[1-\lambda+\lambda(k-q)]}\dfrac{q_p^m}{q_k^m}z^k;\ \alpha\leq 1-\frac{1}{p-q} \end{cases}$$

$k=n+p-1,n+p,\ldots$ için,

$$g_{m_k}(z)=\begin{cases} z^p+(-1)^m\dfrac{(p-q)(1-\alpha)[1-\lambda+\lambda(p-q)]}{[k-q+\alpha(p-q)]\,[(1-\lambda)-\lambda(k-q)]}\dfrac{q_p^m}{q_k^m}\overline{z}^k;\ \alpha\geq 1-\frac{1}{p-q} \\ z^p+(-1)^m\dfrac{[1-\lambda+\lambda(p-q)]}{[k-q+\alpha(p-q)]\,[(1-\lambda)-\lambda(k-q)]}\dfrac{q_p^m}{q_k^m}\overline{z}^k;\ \alpha\leq 1-\frac{1}{p-q} \end{cases}$$

ve

$$x_{n+p-1}\equiv x_p=1-\left(\sum_{k=n+p}^{\infty}x_k+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}y_k\right)\quad x_k\geq 0,\ y_k\geq 0$$

dir. Ayrıca, $\overline{SH}_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha)$ sınıfının ekstrem noktaları $\{h_k\}$ ve $\{g_{m_k}\}$ dır.

İspat. $\alpha\geq 1-\frac{1}{p-q}$ ve

$$\begin{aligned} f_m(z)&=\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\left(x_k h_k(z)+y_k g_{m_k}(z)\right) \\ &=z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{(p-q)(1-\alpha)[1-\lambda+\lambda(p-q)]}{[k-q-\alpha(p-q)]\,[1-\lambda+\lambda(k-q)]}\frac{q_p^m}{q_k^m}x_k z^k \\ &\quad+(-1)^m\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\frac{(p-q)(1-\alpha)\,[1-\lambda+\lambda(p-q)]}{[k-q+\alpha(p-q)][(1-\lambda)-\lambda(k-q)]}\frac{q_p^m}{q_k^m}y_k\overline{z}^k \end{aligned}$$

olsun. Buradan,

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{[k-q-\alpha(p-q)][1-\lambda+\lambda(k-q)]}{(p-q)(1-\alpha)[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^m}{q_p^m}a_k\left(\frac{(p-q)(1-\alpha)[1-\lambda+\lambda(p-q)]}{[k-q-\alpha(p-q)][1-\lambda+\lambda(k-q)]}\frac{q_p^m}{q_k^m}x_k\right)$$
$$+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\frac{[k-q+\alpha(p-q)][(1-\lambda)-\lambda(k-q)]}{(p-q)(1-\alpha)[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^m}{q_p^m}b_k\left(\frac{(p-q)(1-\alpha)[1-\lambda+\lambda(p-q)]}{[k-q+\alpha(p-q)][(1-\lambda)-\lambda(k-q)]}\frac{q_p^m}{q_k^m}y_k\right)$$
$$=\sum_{k=n+p}^{\infty}x_k+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}y_k=1-x_p\leq 1$$

bulunur. Dolayısıyla, $f_m\in\overline{SH}_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha)$ dır. Tersine, $f_m\in\overline{SH}_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha)$ olsun. O halde,

$$a_k\leq\frac{(p-q)(1-\alpha)[1-\lambda+\lambda(p-q)]}{[k-q-\alpha(p-q)][1-\lambda+\lambda(k-q)]}\frac{q_p^m}{q_k^m}$$

ve

$$b_k\leq\frac{(p-q)(1-\alpha)[1-\lambda+\lambda(p-q)]}{[k-q+\alpha(p-q)][1-\lambda-\lambda(k-q)]}\frac{q_p^m}{q_k^m}$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$x_k=\frac{[k-q-\alpha(p-q)]\,(1-\lambda+\lambda(k-q))}{(p-q)(1-\alpha)[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^m}{q_p^m}a_k,\,(k=n+p,n+p+1,...)$$

$$y_k=\frac{[k-q+\alpha(p-q)][(1-\lambda)-\lambda(k-q)]}{(p-q)(1-\alpha)[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^m}{q_p^m}b_k,\,(k=n+p-1,n+p,...)$$

ve $x_p\geq 0$ olmak üzere

$$x_p=1-\left(\sum_{k=n+p}^{\infty}x_k+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}y_k\right)$$

şeklinde alınsın. Buradan, istenildiği gibi

$$f_m(z) = x_p z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} x_k h_k(z) + \sum_{k=n+p-1}^{\infty} y_k g_{m_k}(z)$$

elde edilir. Diğer durum da benzer şekilde ispatlanır. □

2.3.8. Teorem. $\overline{SH}_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha)$ sınıfı konveks birleşimleri üzerinde kapalıdır.

İspat. $\lambda < \frac{1}{n+p-q}$ olsun. $i = 1,2,3,...$ için

$$f_{m_i}(z) = z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} a_{k_i} z^k + (-1)^m \sum_{k=n+p-1}^{\infty} b_{k_i} \overline{z}^k$$

olmak üzere, $f_{m_i}(z)$ fonksiyonu $\overline{SH}_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha)$ sınıfına ait olsun. (2.21) ve (2.22) gereği

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{[k-q-\alpha(p-q)][1-\lambda+\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m} a_{k_i}$$

$$+ \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \frac{[k-q+\alpha(p-q)][(1-\lambda)-\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m} b_{k_i}$$

$$\leq \begin{cases} (1-\alpha)(p-q) & , \alpha \geq 1-\frac{1}{p-q} \\ 1 & , \alpha \leq 1-\frac{1}{p-q} \end{cases} \tag{2.25}$$

dir. Ayrıca, $0 \leq t_i \leq 1$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1$ için f_{m_i} nin konveks birleşimi

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i f_{m_i}(z) = z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i a_{k_i}\right) z^k + (-1)^m \sum_{k=n+p-1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i b_{k_i}\right)\bar{z}^k$$

ile yazılabilir. Buradan, (2.25) gereği,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{[k-q-\alpha(p-q)][1-\lambda+\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m}\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i a_{k_i}\right) \\
&+(-1)^m \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \frac{[k-q+\alpha(p-q)][(1-\lambda)-\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m}\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i b_{k_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} t_i \left\{ \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{[k-q-\alpha(p-q)][1-\lambda+\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m} a_{k_i} \right. \\
&\left. + (-1)^m \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \frac{[k-q+\alpha(p-q)][(1-\lambda)-\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]} \frac{q_k^m}{q_p^m} b_{k_i} \right\} \\
&\leq \begin{cases} (1-\alpha)(p-q)\sum_{i=1}^{\infty} t_i = (1-\alpha)(p-q) & , \alpha \geq 1-\frac{1}{p-q} \\ \sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1 & , \alpha \leq 1-\frac{1}{p-q} \end{cases}
\end{aligned}$$

dir. Böylece (2.21) ve (2.22) sağlandığından $\sum_{i=1}^{\infty} t_i f_{m_i}(z) \in \overline{SH}_{n,p}^m(q,\lambda,\alpha)$ dır. □

2.3.9. Teorem. $\lambda < \frac{1}{n+p-q}$ ve $\alpha_1 \geq 1-\frac{1}{p-q}$ olsun. $\alpha_1 < \alpha_2$ için

$$\overline{SH}_{n,p}^m(q,\lambda,\alpha_2) \subset \overline{SH}_{n,p}^m(q,\lambda,\alpha_1)$$

dir.

İspat. $\lambda < \frac{1}{n+p-q}$, $\alpha_1 \geq 1-\frac{1}{p-q}$, $\alpha_1 < \alpha_2$ ve $f_m(z) \in \overline{SH}_{n,p}^m(q,\lambda,\alpha_2)$ olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{[k-q-\alpha_1(p-q)]\,[1-\lambda+\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]\,(1-\alpha_1)}\frac{q_k^m}{q_p^{m+1}}|a_k|$$

$$+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\frac{[k-q+\alpha_1(p-q)]\,|(1-\lambda)-\lambda(k-q)|}{[1-\lambda+\lambda(p-q)](1-\alpha_1)}\frac{q_k^m}{q_p^{m+1}}|b_k|$$

$$\leq \sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{[k-q-\alpha_2(p-q)]\,[1-\lambda+\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)](1-\alpha_2)}\frac{q_k^m}{q_p^{m+1}}|a_k|$$

$$+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\frac{[k-q+\alpha_2(p-q)]\,|(1-\lambda)-\lambda(k-q)|}{[1-\lambda+\lambda(p-q)](1-\alpha_2)}\frac{q_k^m}{q_p^{m+1}}|b_k|$$
$$\leq 1$$

ise $f_m(z)\in \overline{SH}_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha_1)$ dır. □

Literatürde komşuluklar üzerine yapılan çalışmalar (Goodman 1957, Ruscheweyh 1981, Altıntaş ve Owa 1996, Altıntaş 2007, Altıntaş ve ark. 2008, Frasin 2007) takip edilerek $f_m = h+\overline{g_m}\in\overline{SH}(n,p)$ fonksiyonunun δ komşuluklarının kümesi,

$$N_{n,p}^{\delta}(f_m^{(q)};\, s_m^{(q)})=\Bigg\{ s_m\in\overline{SH}(n,p):\ s_m(z)=z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}A_k z^k+(-1)^m\sum_{k=n+p-1}^{\infty}B_k\overline{z}^k,$$
$$A_k,\ B_k\geq 0,\ B_{n+p-1}<1,$$
$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{(k-q)!}k\left(|a_k-A_k|+|b_k-B_k|\right)+\frac{(n+p-1)!(n+p-1)}{(n+p-1-q)!}|b_{n+p-1}-B_{n+p-1}|\leq\delta,\ \delta>0\Bigg\} \tag{2.26}$$

ile tanımlanır.

Özel olarak, $e(z)=z^p$ fonksiyonunun δ komşuluklarının kümesi

$$N_{n,p}^{\delta}(e^{(q)};\ s_m^{(q)})=\left\{s_m\in\overline{SH}(n,p):\ s_m(z)=z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}A_k z^k+(-1)^m\sum_{k=n+p-1}^{\infty}B_k\overline{z}^k,\right.$$
$$A_k,\ B_k\geq 0,\ B_{n+p-1}<1,$$
$$\left.\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{(k-q)!}k\left(A_k+B_k\right)+\frac{(n+p-1)!\left(n+p-1\right)}{(n+p-1-q)!}\,|B_{n+p-1}|\leq\delta,\ \delta>0\right\}$$

(2.27)

ile tanımlanır.

2.3.10. Teorem. $\lambda<\frac{1}{n+p-q}$ ve $s_m(z)\in\overline{SH}_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha)$ olsun. Bu takdirde, $e(z)$ ve $s_m(z)$ (2.27) formunda,

(i) $\alpha\geq 1-\frac{1}{p-q}$ için

$$\delta=\frac{(n+p)(1-\alpha)(p-q)}{\left(n+(1-\alpha)(p-q)\right)\times\Psi}-\left(\frac{(n+p)\left[n-1+(1+\alpha)\left(p-q\right)\right]\left[1-\lambda-\lambda(n+p-1-q)\right]q_{n+p-1}^{m}}{\left[n+(1-\alpha)(p-q)\right]\left[1-\lambda-\lambda(n+p-q)\right](n+p-q)^m}\right.$$
$$\left.-\frac{(n+p-1)!\left(n+p-1\right)}{(n+p-1-q)!}\right)B_{n+p-1},$$

(ii) $\alpha\leq 1-\frac{1}{p-q}$ için

$$\delta=\frac{(n+p)}{\left(n+(1-\alpha)(p-q)\right)\times\Psi}-\left(\frac{(n+p)\left[n-1+(1+\alpha)\left(p-q\right)\right]\left[1-\lambda-\lambda(n+p-1-q)\right]q_{n+p-1}^{m}}{\left[n+(1-\alpha)(p-q)\right]\left[1-\lambda-\lambda(n+p-q)\right](n+p-q)^m}\right.$$
$$\left.-\frac{(n+p-1)!\left(n+p-1\right)}{(n+p-1-q)!}\right)B_{n+p-1},$$

olmak üzere,

$$\overline{SH}_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha)\subset N_{n,p}^{\delta}(e^{(q)};\ s_m^{(q)})$$

dir. Burada, $\Psi = \dfrac{[1-\lambda-\lambda(n+p-q)](n+p-q)^m}{[(1-\lambda)+\lambda(p-q)]q_p^m}$ dir.

İspat. $s_m(z) \in \overline{SH}^m_{n,p}(q,\lambda,\alpha)$ ve $\alpha \geq 1-\frac{1}{p-q}$ olsun. $s_m(z) \in N^{\delta}_{n,p}(e^{(q)};s_m^{(q)})$ olduğu gösterilmelidir. O halde, s_m nin (2.27) koşulunu sağladığını göstermek yeterlidir. Teorem 2.3.4 gereği,

$$\Psi \times \left[\sum_{k=n+p}^{\infty}[k-q-\alpha(p-q)]\frac{k!}{(k-q)!}A_k + \sum_{k=n+p}^{\infty}[k-q+\alpha(p-q)]\frac{k!}{(k-q)!}B_k\right]$$
$$\leq (1-\alpha)(p-q) - \frac{[n-1+(1+\alpha)(p-q)][1-\lambda-\lambda(n+p-1-q)]q_{n+p-1}^m}{[(1-\lambda)+\lambda(p-q)]q_p^m}B_{n+p-1}$$

yazılır. Diğer yandan

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\left(\frac{k!}{(k-q)!}k\right)(A_k+B_k)$$
$$\leq \frac{(1-\alpha)(p-q)}{\Psi} - \frac{[n-1+(1+\alpha)(p-q)][1-\lambda-\lambda(n+p-1-q)]q_{n+p-1}^m}{\Psi\times[1-\lambda+\lambda(p-q)]q_p^m}B_{n+p-1}$$
$$+(q+\alpha(p-q))\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{(k-q)!}(A_k+B_k)$$
$$\leq \frac{(1-\alpha)(p-q)}{\Psi} - \frac{[n-1+(1+\alpha)(p-q)][1-\lambda-\lambda(n+p-1-q)]q_{n+p-1}^m}{[1-\lambda-\lambda(n+p-q)](n+p-q)^m}B_{n+p-1}$$
$$+\frac{[q+\alpha(p-q)]}{n+p}\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{(k-q)!}k\,(A_k+B_k)$$

olduğundan,

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\left(\frac{k!}{(k-q)!}k\right)(A_k+B_k)$$

$$\leq \frac{(n+p)(1-\alpha)(p-q)}{[n+(1-\alpha)(p-q)]\times\Psi}$$

$$-\frac{(n+p)[n-1+(1+\alpha)(p-q)][1-\lambda-\lambda(n+p-1-q)]q_{n+p-1}^{m}}{[n+(1-\alpha)(p-q)][1-\lambda-\lambda(n+p-q)](n+p-q)^{m}}B_{n+p-1}$$

$$=\delta-\frac{(n+p-1)!(n+p-1)}{(n+p-1-q)!}B_{n+p-1}$$

elde edilir. (2.27) gereği ispat tamamlanır. Diğer durumun ispatı da benzer şekilde yapılır.□

2.3.11. Uyarı. $m=0$ iken $s_m(z)$ nin ko-analitik kısmı sıfıra özdeş ise, $p=1$, $q=\lambda=m=0$ ve $p=m=1$, $q=\lambda=0$ için Teorem 2.3.10 da elde edilen komşuluk, sırasıyla (Altıntaş 1996) da Teorem 2.1 ve Teorem 2.2 olarak verilmiştir.

2.3.12. Sonuç. $m=0$ iken $s_m(z)$ fonksiyonu $\overline{SH}^{0}_{1,p}(0,0,\alpha)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde, $e(z)$ ve $s_m(z)$ (2.27) formunda ve

$$\delta=\begin{cases}\frac{p(1+p)(1-\alpha)}{1+p(1-\alpha)}-\left(\frac{p(1+p)(1+\alpha)}{1+p(1-\alpha)}-1\right)B_p & ,\alpha\geq 1-\frac{1}{p-q}\\ \frac{(1+p)}{1+p(1-\alpha)}-\left(\frac{p(1+p)(1+\alpha)}{1+p(1-\alpha)}-1\right)B_p & ,\alpha\leq 1-\frac{1}{p-q}\end{cases}$$

olmak üzere,

$$\overline{SH}^{0}_{1,p}(0,0,\alpha)\subset N^{\delta}_{1,p}(e^{(0)};\ s^{(0)}_{m})$$

dir.

2.3.13. Sonuç. $m=0$ iken $s_m(z)$ fonksiyonu $\overline{SH}^{0}_{1,p}(0,0,0)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde, $e(z)$ ve $s_m(z)$ (2.27) formunda ve $\delta=p$ olmak üzere,

$$\overline{SH}^{0}_{1,p}(0,0,0) \subset N^{\delta}_{1,p}(e^{(0)};\ s^{(0)}_m)$$

dir.

2.3.14. Sonuç. $m=0$ iken $s_m(z)$ fonksiyonu $\overline{SH}^{1}_{1,1}(0,0,0)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde, $e(z)$ ve $s_m(z)$ (2.27) formunda ve $\delta = \frac{1}{2}(1+B_1)$ olmak üzere,

$$\overline{SH}^{1}_{1,1}(0,0,0) \subset N^{\delta}_{1,1}(e^{(0)};\ \mathrm{s}^{(0)}_m)$$

dir.

2.3.15. Sonuç. $m=0$ iken $s_m(z)$ fonksiyonu $\overline{SH}^{m}_{1,1}(0,0,0)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde, $e(z)$ ve $s_m(z)$ (2.27) formunda ve $\delta = \frac{1}{2^m} - \left(\frac{1}{2^m} - 1\right)B_1$ olmak üzere,

$$\overline{SH}^{m}_{1,1}(0,0,0) \subset N^{\delta}_{1,1}(e^{(0)};\ s^{(0)}_m)$$

dir.

2.3.16. Teorem. $\lambda < \frac{1}{n+p-q}$ ve $f_m \in \overline{SH}^{m}_{n,p}(q,\lambda,\alpha)$ olsun. Bu takdirde,

(i) $\alpha \geq 1 - \frac{1}{p-q}$ için

$$\delta \leq \frac{(n+p-1)!}{(n+p-1-q)!}\Big[p - \Omega \times (1-\alpha)(p-q) + \left(\frac{(n+p-q)![n-1+(1+\alpha)(p-q)][1-\lambda-\lambda(n+p-1-q)]q^{m}_{n+p-1}}{[n+(1-\alpha)(p-q)][1-\lambda-\lambda(n+p-q)](n+p-q)^m(n+p-1)!} - (n+p-1)\right)b_{n+p-1}\Big]$$

(ii) $\alpha \leq 1 - \frac{1}{p-q}$ için

$$\delta \leq \frac{(n+p-1)!}{(n+p-1-q)!}\Bigg[p-\Omega$$

$$+\left(\frac{(n+p-q)![n-1+(1+\alpha)(p-q)][1-\lambda-\lambda(n+p-1-q)]q_{n+p-1}^{m}}{[n+(1-\alpha)(p-q)][1-\lambda-\lambda(n+p-q)](n+p-q)^{m}(n+p-1)!}-(n+p-1)\right)b_{n+p-1}\Bigg]$$

olmak üzere,

$$N_{n,p}^{\delta}(f_m^{(q)};\ s_m^{(q)}) \subset SH^{*}(n,p)$$

dir. Burada $\Omega = \dfrac{[(1-\lambda)+\lambda(p-q)](n+p-q)!q_p^m}{[n+(1-\alpha)(p-q)][1-\lambda-\lambda(n+p-q)](n+p-q)^m(n+p-1)!}$ dir.

İspat. $\alpha \geq 1-\frac{1}{p-q}$, $f_m(z) \in \overline{SH}_{n,p}^{m}(q,\lambda,\alpha)$ ve $s_m(z) \in N_{n,p}^{\delta}(f_m^{(q)};s_m^{(q)})$ olsun. $s_m(z) \in SH^{*}(n,p)$ olduğu gösterilmelidir. O halde, s_m nin Teorem 1.4.14 ü sağladığını göstermek yeterlidir. Buradan,

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} k\left(A_k+B_k\right)+(n+p-1)B_{n+p-1}$$

$$\leq \sum_{k=n+p}^{\infty} k\left[|a_k-A_k|+|b_k-B_k|\right]+(n+p-1)|b_{n+p-1}-B_{n+p-1}|$$

$$+\sum_{k=n+p}^{\infty} k\left(a_k+b_k\right)+(n+p-1)b_{n+p-1}$$

$$\leq \frac{(n+p-1-q)!}{(n+p-1)!}\left[\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{(k-q)!}k\left[|a_k-A_k|+|b_k-B_k|\right]\right.$$

$$\left.+\frac{(n+p-1)!(n+p-1)}{(n+p-1-q)!}|b_{n+p-1}-B_{n+p-1}|\right]+(n+p-1)b_{n+p-1}$$

$$+\Omega\times\left(\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{[k-q-\alpha(p-q)][1-\lambda+\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^m}{q_p^m}a_k\right.$$

$$\left.+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{[k-q+\alpha(p-q)][1-\lambda-\lambda(k-q)]}{[1-\lambda+\lambda(p-q)]}\frac{q_k^m}{q_p^m}b_k\right)$$

$$\leq \frac{(n+p-1-q)!}{(n+p-1)!}\delta + (n+p-1)b_{n+p-1}$$
$$+\Omega \times \left((1-\alpha)(p-q) - \frac{(n-1+(1+\alpha)(p-q))(1-\lambda-\lambda(n+p-1-q))}{(1-\lambda+\lambda(p-q))q_p^m} \frac{q_{n+p-1}^m}{q_p^m} b_{n+p-1} \right)$$
$$(2.28)$$

elde edilir.

$$\delta \leq \frac{(n+p-1)!}{(n+p-1-q)!}\Big[p - \Omega \times (1-\alpha)(p-q)$$
$$+\left(\frac{(n+p-q)![n-1+(1+\alpha)(p-q)][1-\lambda-\lambda(n+p-1-q)]q_{n+p-1}^m}{[n+(1-\alpha)(p-q)][1-\lambda-\lambda(n+p-q)](n+p-q)^m (n+p-1)!} - (n+p-1) \right) b_{n+p-1} \Big]$$

alınırsa, (2.28) in sağ tarafı p den daha büyük olamaz. Diğer durumun ispatı da benzer şekilde yapılır. □

2.3.17. Uyarı. $m=1$, $n=p=1$, $q=\lambda=\alpha=0$ için, Teorem 2.3.16 da verilen komşuluk, (Avcı 1990)'da verilmiştir.

2.3.18. Sonuç. $f_m(z)$ fonksiyonu $\overline{SH}_{1,1}^m(0,0,0)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde, $f_m(z)$ ve $s_m(z)$ sırasıyla, (2.19) ve (2.26) formunda ve $\delta = \left(1-\frac{1}{2^m}\right)(1-b_1)$ olmak üzere,

$$\overline{SH}_{1,1}^m(0,0,0) \subset N_{1,1}^{\delta}(f_m^{(0)};\ s_m^{(0)})$$

dir.

3. HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR YARDIMIYLA KURULAN HARMONİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde, harmonik yalınkat fonksiyonların hipergeometrik fonksiyonlarla konvolüsyonları ile elde edilen ve ilk olarak 2007 yılında Ahuja tarafından tanımlanmış olan lineer operatör ele alındı. Bu operatör ile oluşan yeni harmonik fonksiyonun iki farklı sınıfı tanımlandı. Tanımlanan sınıfların katsayı gerek ve yeter koşulu ve komşulukları gibi çeşitli özellikleri incelendi.

Ayrıca, harmonik çok katlı fonksiyonların hipergeometrik fonksiyonlar ile konvolüsyonları ile elde edilen yeni bir operatör tanımlanmıştır. Tanımlanan bu operatör ile oluşturulan harmonik çok katlı fonksiyonun yeni bir sınıfı tanımlanmış, katsayı gerek ve yeter koşulu, distorsiyon sınırları, ekstrem noktaları elde edilmiştir.

3.1. Giriş

$c \neq 0,-1,-2,...$ olmak üzere a,b,c birer kompleks sayı olsun. Gauss hipergeometrik fonksiyonu,

$$F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(\lambda)_n$ ile gösterilen Pochhammer sembolü; $(\lambda)_0 = 1$ ve $n = 1,2,3,\cdots$ için

$$(\lambda)_n = \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda+1)...(\lambda+n-1)$$

ile tanımlanır. $\mathrm{Re}(c-a-b) > 0$ ise

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \quad c \neq 0,-1,-2,...$$

dir. $F(a,b;c;z)$ hipergeometrik fonksiyonu birim diskte analitiktir ve yalınkat fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Detaylı bilgi için (Branges 1985, Dziok ve Srivastava 2003, Ruscheweyh ve Singh 1986) a bakılabilir.

$i=1,2$ olmak üzere a_i ve b_i nin pozitif değerleri için ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları

$$\phi_1(z) = zF(a_1,b_1;c_1;z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a_1)_{n-1}(b_1)_{n-1}}{(c_1)_{n-1}(1)_{n-1}} z^n$$

$$\phi_2(z) = zF(a_2,b_2;c_2;z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_2)_{n-1}(b_2)_{n-1}}{(c_2)_{n-1}(1)_{n-1}} z^n, \ z \in U \tag{3.1}$$

ile tanımlansın.

$f = h + \overline{g} \in SH$ ve ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları (3.1) ile verildiği gibi olmak üzere, Ahuja (2007) $\Omega_c^{a,b} f \ : \ SH \to SH$ konvolüsyon operatörünü

$$\begin{aligned} \Omega_c^{a,b} f &:= f \,\tilde{*}\, (\phi_1 + \overline{\phi_2}) \\ &= h * \phi_1 + \overline{g * \phi_2} \end{aligned}$$

ile tanımladı.

$f = h + \overline{g} \in SH$ için $\left(\Omega_c^{a,b} f\right)(z) = H(z) + \overline{G(z)} \in SH$ öyle ki,

$$\begin{aligned} H(z) &= z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a_1)_{n-1}(b_1)_{n-1}}{(c_1)_{n-1}(1)_{n-1}} A_n z^n, \\ G(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_2)_{n-1}(b_2)_{n-1}}{(c_2)_{n-1}(1)_{n-1}} B_n \, z^n \end{aligned} \tag{3.2}$$

ve $|B_1| < 1$ dir. Hohlov (1978) aynı lineer operatörü analitik fonksiyonlar için tanımlamıştır ve $I_{a,b,c}$ ile göstermiştir.

$f \in S$ için $\Omega_c^{a,b} f$ literatürde var olan birçok lineer operatörü içerir:

(i) $\Omega_1^{\delta+1,1} f(z) = D^{\delta} f(z)$ $(\delta > -1)$, Ruscheweyh türev operatörü (Ruscheweyh 1975),

(ii) $\Omega_{\mu+2}^{\mu+1,1} f(z) = F_{\mu}(f)(z) = \frac{\mu+1}{z_{\mu}} \int_0^z t^{\mu-1} f(t)dt$ $(\mu > -1)$, Genelleştirilmiş Bernardi-Libera-Livingston integral operatörü (Choi ve ark. 2002),

(iii) $\Omega_{2-\lambda}^{2,1} f(z) = \frac{\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(2)} z^{\lambda} D_z^{\lambda} f(z)$ $(0 \le \lambda < 1)$, $D_z^{\lambda} f(z)$ λ mertebeli kesirli türev operatörü (Owa 1978, Owa ve Srivastava 1987),

(iv) $\Omega_c^{a,1} f(z) = L(a,c)F(z)$ $(a \in \mathrm{R};\ c \in \mathrm{R}/\mathrm{Z}_0^-)$, Carlson-Shaffer operatorü (Carlson ve Shaffer 1984).

3.1.1. Lemma. (Ahuja 2008) $a,\ b,\ c > 0$ olsun.

(i) $c > a+b+k$ ise,

$$F(a+k,b+k,c+k,1) = \frac{(c)_k}{(c-a-b-k)_k} F(a,b;c;1),\ \ k = 0,1,2,\ldots,$$

(ii) $c > a+b+1$ ise,

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}} = \frac{ab}{c-a-b-1} F(a,b;c;1),$$

(iii) $c > a+b+2$ ise,

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)^2 \frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}} = \left[\frac{(a)_2(b)_2}{(c-a-b-2)_2} + \frac{ab}{c-a-b-1} \right] F(a,b;c;1),$$

(iv) $c > a+b+3$ ise,

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^3\,\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}}=\left[\frac{(a)_3(b)_3}{(c-a-b-3)_3}+\frac{3(a)_2(b)_2}{(c-a-b-2)_2}+\frac{ab}{c-a-b-1}\right]F(a,b;c;1)$$

dir.

Bu bölümün geri kalan kısmında $\dfrac{(a_1)_{n-1}(b_1)_{n-1}}{(c_1)_{n-1}(1)_{n-1}}$ yerine Γ_h, $\dfrac{(a_2)_{n-1}(b_2)_{n-1}}{(c_2)_{n-1}(1)_{n-1}}$ yerine Γ_g kullanılacaktır.

SH sınıfının alt sınıfı olan TSH ile

$$h(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|A_n|\,z^n,\quad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}|B_n|\,z^n,\quad |B_1|<1 \tag{3.3}$$

formundaki h ve g yi içeren $f=h+\overline{g}$ fonksiyonlarının sınıfı gösterilsin.

3.2. $SH(b,\lambda,\alpha)$ ve $TSH(b,\lambda,\alpha)$ Sınıfları

$SH(b,\lambda,\alpha)$; $\lambda\geq 0,\ 0<\alpha\leq 1,\ b\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $|b|\leq 1$, $z=r\,e^{i\theta}\in U$ olmak üzere

$$\left|\frac{1}{b}\left((1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)+\lambda\left(\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}f(z)}{\frac{\partial}{\partial\theta}z}\right)-1\right)\right|<\alpha \tag{3.4}$$

eşitsizliğini sağlayan $f=h+\overline{g}\in SH$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfı göstersin.

$TSH(b,\lambda,\alpha):=SH(b,\lambda,\alpha)\cap TSH$ olsun.

$0<b\leq 1$ için $SH(b,\lambda,1)$ sınıfı, Yalçın ve ark (2006) tarafından çalışılmış olan $H_1^0(n;\lambda,\alpha)$ sınıfının bir alt sınıfıdır.

3.2.1. Teorem. $f = h + \overline{g}$ (1.8) formunda verildiği gibi alınsın. $\lambda \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $b \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $|b| \leq 1$ olmak üzere

$$\sum_{n=2}^{\infty} |\lambda(n-1)+1|\,|A_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(n+1)-1|\,|B_n| \leq \alpha\,|b| \tag{3.5}$$

ise $f \in SH(b,\lambda,\alpha)$ dır.

İspat. $f \in SH(b,\lambda,\alpha)$ olduğunu göstermek için (3.4) eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Buradan,

$$\begin{aligned}
&\left|\left((1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right) + \lambda\left(\frac{\frac{\partial}{\partial\theta} f(z)}{\frac{\partial}{\partial\theta} z}\right) - 1\right)\right| \\
&= \left|(1-\lambda)\frac{h(z)+\overline{g(z)}}{z} + \lambda\,\frac{zh'(z)-\overline{zg'(z)}}{z} - 1\right| \\
&= \left|(1-\lambda)\left(1+\sum_{n=2}^{\infty} A_n z^{n-1} + \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{B_n z^n}\right) + \lambda\left(1+\sum_{n=2}^{\infty} n\,A_n z^{n-1} - \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} n\,\overline{B_n z^n}\right) - 1\right| \\
&= \left|\sum_{n=2}^{\infty}(\lambda n + 1 - \lambda)A_n z^{n-1} + \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda n + 1 - \lambda)\overline{B_n z^n}\right|
\end{aligned}$$

bulunur. $|z| = r < 1$ alındığında ve (3.5) eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=2}^{\infty}(\lambda n + 1 - \lambda)A_n z^{n-1} + \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda n + 1 - \lambda)\overline{B_n z^n}\right| \\
&< \sum_{n=2}^{\infty} |\lambda(n-1)+1|\,|A_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(n+1)-1|\,|B_n| \\
&\leq \alpha|b|
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, $f \in SH(b,\lambda,\alpha)$ olduğu elde edilir. □

3.2.2. Teorem. $f = h + \overline{g} \in TSH$ olsun. $\lambda \geq 0,\ 0 < \alpha \leq 1,\ b \in \mathbb{C} \backslash \{0\},\ |b| \leq 1$ olmak üzere, $f \in TSH(b,\lambda,\alpha)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{n=2}^{\infty} |\lambda(n-1)+1|\,|A_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(n+1)-1|\,|B_n| \leq \alpha\,|b| \tag{3.6}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. Yeter koşul $TSH(b,\lambda,\alpha) \subset SH(b,\lambda,\alpha)$ olduğundan Teorem 3.2.1 den görülür. Gerek koşul için $f \in TSH(b,\lambda,\alpha)$ olsun. Dolayısıyla, (3.4) den

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\frac{h(z)+\overline{g(z)}}{z} + \lambda\frac{zh'(z)-\overline{zg'(z)}}{z} - 1\right\} > -\alpha\,|b|$$

veya denk olarak

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\left(1-\sum_{n=2}^{\infty}|A_n|z^{n-1} + \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}|B_n|\,\overline{z}^{n}\right) + \lambda\left(1-\sum_{n=2}^{\infty}n\,|A_n|z^{n-1} - \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}n|B_n|\overline{z}^{n}\right) - 1\right\}$$
$$> -\alpha\,|b|$$

yazılır.

Yukarıda elde edilen eşitsizlik $|z| = r < 1$ şeklindeki her z için sağlanmalıdır. z değerleri $0 \leq z = r < 1$ olmak üzere pozitif reel eksen üzerinden seçilirse,

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\left(1-\sum_{n=2}^{\infty}|A_n|\,r^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}|B_n|\,r^{n-1}\right) + \lambda\left(1-\sum_{n=2}^{\infty}n\,|A_n|\,r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}n\,|B_n|\,r^{n-1}\right) - 1\right\}$$
$$= \operatorname{Re}\left\{-\sum_{n=2}^{\infty}(\lambda n + 1 - \lambda)\,|A_n|\,r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda n - (1-\lambda))\,|B_n|\,r^{n-1}\right\}$$
$$> -\sum_{n=2}^{\infty}|\lambda(n-1)+1|\,|A_n| - \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda(n+1)-1|\,|B_n|$$
$$> -\alpha|b|$$

bulunur. Böylece, (3.6) eşitsizliği elde edilir. □

3.2.3. Sonuç $0<\alpha\le 1,\ b\in\mathbb{C}\backslash\{0\},\ |b|\le 1$ olmak üzere

(i) $TSH(b,1,\alpha)\subset TSH(b,0,\alpha)$,

(ii) $0<\lambda\le 1$ için $TSH(b,1,\alpha)\subset TSH(b,\lambda,\alpha)$,

(iii) $\lambda\ge 1$ için $TSH(b,\lambda,\alpha)\subset TSH(b,1,\alpha)$ dır.

3.2.4. Teorem. $j=1,2$ için $a_j,\ b_j\in\ \mathbb{C}\backslash\{0\},\ c_j\in\mathbb{R},\ c_j>|a_j|+|b_j|+1$ ve $|a_2||b_2|<c_2$ olsun. Ayrıca, $\phi_1(z)$ ve $\phi_2(z)$ (3.1) ile verildiği gibi ve $\lambda\ge 0,\ 0<\alpha\le 1$, $b\in\mathbb{C}\backslash\{0\},\ |b|\le 1$ olmak üzere

$$\Phi(z)=z\left(2-\frac{\phi_1(z)}{z}\right)+\overline{\phi_2(z)}\in TSH(b,\lambda,\alpha)$$

olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\begin{aligned}&\left(\lambda\frac{|a_1||b_1|}{c_1-|a_1|-|b_1|-1}+1\right)F(|a_1|,|b_1|;c_1;1)\\&+\left(\lambda\frac{|a_2||b_2|}{c_2-|a_2|-|b_2|-1}+\lambda+1\right)F(|a_2|,|b_2|;c_2;1)-2-\lambda\\&\le\alpha|b|\end{aligned}\tag{3.7}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. $\Phi(z)$ de (3.1) ile verilen $\phi_1(z)$ ve $\phi_2(z)$ nin yerine yazılmasıyla

$$\Phi(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a_1)_{n-1}(b_1)_{n-1}}{(c_1)_{n-1}(1)_{n-1}}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_2)_{n-1}(b_2)_{n-1}}{(c_2)_{n-1}(1)_{n-1}}\overline{z}^n$$

elde edilir. Teorem 3.2.2 gereği $\Phi(z)\in TSH(b,\lambda,\alpha)$ olduğunu göstermek için

$$\sum_{n=2}^{\infty}|\lambda(n-1)+1|\frac{(a_1)_{n-1}(b_1)_{n-1}}{(c_1)_{n-1}(1)_{n-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda(n+1)-1|\frac{(a_2)_{n-1}(b_2)_{n-1}}{(c_2)_{n-1}(1)_{n-1}}\leq \alpha\,|b|$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Lemma 3.1.1 in kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}|\lambda(n-1)+1|\,\Gamma_h+\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda(n+1)-1|\,\Gamma_g\\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty}\big(\lambda(n-1)+1\big)\Gamma_h+\sum_{n=1}^{\infty}\big(\lambda(n+1)+1\big)\Gamma_g\\
&=\left(\lambda\frac{|a_1||b_1|}{c_1-|a_1|-|b_1|-1}+1\right)F(|a_1|,|b_1|;c_1;1)\\
&+\left(\lambda\frac{|a_2||b_2|}{c_2-|a_2|-|b_2|-1}+\lambda+1\right)F(|a_2|,|b_2|;c_2;1)-2-\lambda
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\Phi(z)\in TSH(b,\lambda,\alpha)$ olması için gerekli ve yeterli koşul yukarıda elde edilen son eşitsizliğin $\alpha|b|$ ile sınırlı olmasıdır. □

3.2.5. Teorem. $j=1,2$ için $a_j,\ b_j\in\mathbb{C}\backslash\{0\},\ c_j>|a_j|+|b_j|+3$ olsun. $b\in\mathbb{C}\backslash\{0\},\ |b|\leq 1,$ $0<\alpha\leq 1,\ \lambda\geq 0$ ve

$$C_2:=2\lambda\frac{(|a_1|)_3(|b_1|)_3}{(c_1-|a_1|-|b_1|-3)_3}+\big(13\lambda+2\big)\frac{(|a_1|)_2(|b_1|)_2}{(c_1-|a_1|-|b_1|-2)_2}+(15\lambda+9)\frac{|a_1||b_1|}{c_1-|a_1|-|b_1|-1}+6,$$

$$D_2:=2\lambda\frac{(|a_2|)_3(|b_2|)_3}{(c_2-|a_2|-|b_2|-3)_3}+(5\lambda+2)\frac{(|a_2|)_2(|b_2|)_2}{(c_2-|a_2|-|b_2|-2)_2}-(\lambda+1)\frac{|a_2||b_2|}{c_2-|a_2|-|b_2|-1}$$
$$+(\lambda+1)$$

olmak üzere

$$C_2F(|a_1|,|b_1|;c_1;1)+D_2F(|a_2|,|b_2|;c_2;1)-\big[7+\lambda\big]\leq 6\alpha|b| \tag{3.8}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise $\Omega_c^{a,b}(SH_0^*) \subset SH(b,\lambda,\alpha)$ dır.

İspat. $f = h + \overline{g} \in SH_0^*$ olsun. (3.2) de verilen H ile G için $\Omega_c^{a,b} f = H + \overline{G} \in SH(b,\lambda,\alpha)$ olduğu gösterilmelidir. Dolayısıyla, Teorem 3.2.1 gereği

$$\sum_{n=2}^{\infty} |\lambda(n-1)+1| \frac{(a_1)_{n-1}(b_1)_{n-1}}{(c_1)_{n-1}(1)_{n-1}} |A_n| + \sum_{n=2}^{\infty} |\lambda(n+1)-1| \frac{(a_2)_{n-1}(b_2)_{n-1}}{(c_2)_{n-1}(1)_{n-1}} |B_n| \leq \alpha |b|$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Teorem 1.4.4, Lemma 3.1.1 ve (3.8) ile verilen eşitsizlik gereği

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}\left[|\lambda(n-1)+1| \frac{(a_1)_{n-1}(b_1)_{n-1}}{(c_1)_{n-1}(1)_{n-1}} |A_n| + |\lambda(n+1)-1| \frac{(a_2)_{n-1}(b_2)_{n-1}}{(c_2)_{n-1}(1)_{n-1}} |B_n| \right] \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty}\left[(\lambda(n-1)+1)\frac{(2n+1)(n+1)}{6}\Gamma_h + (\lambda(n+1)+1)\frac{(2n-1)(n-1)}{6}\Gamma_g \right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\sum_{n=2}^{\infty}(2\lambda(n-1)^3 + (7\lambda+2)(n-1)^2 + (6\lambda+7)(n-1)+6)\Gamma_h \right] \\
&\quad + \frac{1}{6}\left[\sum_{n=2}^{\infty}(2\lambda n^3 + (-\lambda+2)n^2 - (2\lambda+3)n + \lambda + 1)\Gamma_g \right] \\
&= \frac{1}{6}\left[C_2 F(|a_1|,|b_1|;c_1;1) + D_2 F(|a_2|,|b_2|;c_2;1) - (7+\lambda) \right] \\
&\leq \alpha |b|
\end{aligned}$$

elde edilir. □

3.2.6. Teorem. $j = 1,2$ için $a_j,\ b_j \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $c_j \in \mathbb{R}$ ve $c_j > |a_j| + |b_j| + 3$ olsun. $b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $|b| \leq 1$, $0 < \alpha \leq 1$, $\lambda \geq 0$ ve

$$C_3 := \lambda \frac{(|a_1|)_2(|b_1|)_2}{(c_1-|a_1|-|b_1|-2)_2} + (3\lambda+1)\frac{|a_1||b_1|}{c_1-|a_1|-|b_1|-1} + 2$$

$$D_3 := \lambda \frac{(|a_2|)_2(|b_2|)_2}{(c_2-|a_2|-|b_2|-2)_2} + (\lambda+1)\frac{|a_2||b_2|}{c_2-|a_2|-|b_2|-1} - (\lambda+1)$$

için

$$C_3F(|a_1|,|b_1|;c_1;1)+D_3F(|a_2|,|b_2|;c_2;1)+\lambda-1\le 2\alpha|b| \tag{3.9}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise $\Omega_c^{a,b}(KH^0)\subset SH(b,\lambda,\alpha)$ dir.

İspat. $f=h+\overline{g}\in KH^0$ olsun. (3.2) de verilen H ile G için $\Omega_c^{a,b}f=H+\overline{G}\in SH(b,\lambda,\alpha)$ olduğu gösterilmelidir. Dolayısıyla, Teorem 3.2.1 gereği

$$\sum_{n=2}^{\infty}|\lambda(n-1)+1|\frac{(a_1)_{n-1}(b_1)_{n-1}}{(c_1)_{n-1}(1)_{n-1}}|A_n|+\sum_{n=2}^{\infty}|\lambda(n+1)-1|\frac{(a_2)_{n-1}(b_2)_{n-1}}{(c_2)_{n-1}(1)_{n-1}}|B_n|\le\alpha|b|$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Teorem 1.4.9, Lemma 3.1.1 ve (3.9) ile verilen eşitsizlik gereği

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}\left[|\lambda(n-1)+1|\frac{(a_1)_{n-1}(b_1)_{n-1}}{(c_1)_{n-1}(1)_{n-1}}|A_n|+|\lambda(n+1)-1|\frac{(a_2)_{n-1}(b_2)_{n-1}}{(c_2)_{n-1}(1)_{n-1}}|B_n|\right]\\
&\le\sum_{n=2}^{\infty}\left[(\lambda(n-1)+1)\frac{(n+1)}{2}\Gamma_h+(\lambda(n+1)+1)\frac{(n-1)}{2}\Gamma_g\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\left[(\lambda(n-1)^2+(2\lambda+1)(n-1)+2)\Gamma_h+(\lambda n^2+n-(\lambda+1))\Gamma_g\right]\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[C_3F(|a_1|,|b_1|;c_1;1)+D_3F(|a_2|,|b_2|;c_2;1)+\lambda-1\right]\\
&\le\alpha|b|
\end{aligned}$$

bulunur. □

3.3. $V_HUS(k,\gamma)$ ve $V_HUC(k,\gamma)$ Sınıfları

$HUS(k,\gamma)$; H ve G (3.2) ile verildiği gibi olmak üzere $\left(\Omega_c^{a,b}f\right)(z)=H(z)+\overline{G(z)}\in SH$ fonksiyonlarından oluşan ve $k\ge 0$,

$-1 \leq \gamma < 1,\ z = r\, e^{i\eta} \in U$ için

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{zH'(z) - \overline{zG'(z)}}{H(z) + \overline{G(z)}} - \gamma \right\} > k \left| \frac{zH'(z) - \overline{zG'(z)}}{H(z) + \overline{G(z)}} - 1 \right| \tag{3.10}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfı olsun.

$HUC(k,\gamma)$; H ve G (3.2) ile verildiği gibi olmak üzere $\left(\Omega_c^{a,b} f\right)(z) = H(z) + \overline{G(z)} \in SH$ fonksiyonlarından oluşan ve $k \geq 0$, $-1 \leq \gamma < 1,\ z = r\, e^{i\eta} \in U$ için

$$\mathrm{Re}\left\{ 1 + \frac{z^2H''(z) + 2\overline{zG'(z) + z^2G''(z)}}{zH'(z) - \overline{zG'(z)}} - \gamma \right\} > k \left| \frac{z^2H''(z) + 2\overline{zG'(z) + z^2G''(z)}}{zH'(z) - \overline{zG'(z)}} \right| \tag{3.11}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfı olsun.

$f = h + \overline{g} \in SH$ harmonik yalınkat fonksiyonu için, $n \geq 2,\ \alpha_n = \arg(A_n)$ ve $\beta_n = \arg(B_n)$ olmak üzere

$$\alpha_n + (n-1)\zeta = \pi \ (\mathrm{mod}\ 2\pi), \quad \beta_n + (n+1)\zeta \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2\pi) \tag{3.12}$$

eşitliklerini sağlayan bir ζ nın bulunduğu harmonik fonksiyonlar ailesi V_H ile gösterilsin.

$\alpha_n = \pi$, $\beta_n = \zeta = 0$ için, V_H nın özel bir hali olan

$TSH = \left\{ f \in SH \ : f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |A_n|\, z^n + \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|\, \overline{z}^n \right\}$ elde edilir.

$V_H US(k,\gamma) := HUS(k,\gamma) \cap V_H$ ve $V_H UC(k,\gamma) := HUC(k,\gamma) \cap V_H$ olsun.

$V_H US(k,\gamma)$ ve $V_H UC(k,\gamma)$ sınıflarına ait paramatrelerin uygun seçimi ile literatürde var olan aşağıdaki sınıflar elde edilir:

$f = h + \overline{g} \in TSH$, $i = 1,2$ için $a_i = b_i = c_i = 1$ olmak üzere,

(i) $V_H US(0,\gamma) = SH^*(\gamma)$, γ mertebeli harmonik yıldızıl fonksiyon sınıfı (Jahangiri 1999, Silverman 1998, Silverman ve Silvia 1999),

(ii) $V_H UC(0,\gamma) = KH(\gamma)$, γ mertebeli harmonik yıldızıl fonksiyon sınıfı (Jahangiri 1999, Silverman 1998, Silverman ve Silvia 1999),

(iii) $V_H US(1,\gamma) = G_{\overline{H}}(\gamma)$ (Rosy ve ark. 2001),

(iv) $V_H US(k,\gamma) = G_H(k,\gamma)$ (Ahuja ve ark. 2005),

(v) $V_H UC(k,\alpha) = \overline{H}CV(k,\alpha)$ (Kim ve ark. 2002),

ve $f = h + \overline{g} \in V_H$ için,

(vi) $i = 1,2$ için $a_i = b_i = c_i = 1$ olmak üzere $V_H US(0,0) = V_{H^*}$ (Jahangiri ve Silverman 2002),

(vii) $i = 1,2$ için $a_i = m+1,$ $b_i = c_i = 1$ olmak üzere $V_H US(0,\gamma) = V_{\overline{H}}(m,\gamma)$ (Murugusundaramoorthy 2003).

$f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun ko-analitik kısmı sıfır alınır ve yine uygun parametreler seçilirse aşağıdaki alt sınıflar elde edilir:

$i = 1,2$ için $a_i = b_i = c_i = 1$ olmak üzere,

(i) $V_H US(1,0) = UST$ ve $V_H UC(1,0) = UCV$ (Goodman 1991),

(ii) $V_H UC(k,0) = k - UCV$ (Kanas ve Wisniowska 1999),

ve (3.10) ile verilen $f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun ko-analitik kısmı sıfır alındığında $i = 1,2$ için $a_i = b_i = c_i = 1$ olmak üzere $V_H US(1,\gamma) = VS_1^2\left(\left[a_1\right],\gamma\right)$ elde edilir (Silverman ve ark. 2009).

3.3.1. Teorem. $f = h + \overline{g} \in V_H$, $i = 1,2$ için a_i, b_i, c_i sayıları pozitif ve $k \geq 0,$ $-1 \leq \gamma < 1$ olsun. Bu takdirde, $f \in V_H US(k,\gamma)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty}\big(n(k+1)-(k+\gamma)\big)\,\Gamma_h\,|A_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\big(n(k+1)+(k+\gamma)\big)\,\Gamma_g\,|B_n|\leq 1-\gamma \tag{3.13}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. (3.13) koşulunun sağlandığı kabul edilsin. "$\operatorname{Re}(w-\gamma)\geq k|w-1|$ olması için gerekli ve yeterli koşul $-\pi\leq\theta\leq\pi$ için $\operatorname{Re}\left\{w\left(ke^{i\theta}+1\right)-ke^{i\theta}\right\}\geq\gamma$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır" gerçeğinin kullanılmasıyla, $f=h+\overline{g}\in V_H$ fonksiyonunun $V_H US(k,\gamma)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\left(ke^{i\theta}+1\right)\left(zH'(z)-\overline{zG'(z)}\right)}{H(z)+\overline{G(z)}}-ke^{i\theta}\right\}\geq\gamma$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

$$A(z)=\left(ke^{i\theta}+1\right)\left(zH'(z)-\overline{zG'(z)}\right)-ke^{i\theta}\left(H(z)+\overline{G(z)}\right)$$
$$B(z)=H(z)+\overline{G(z)}.$$

olmak üzere, $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{A(z)}{B(z)}\right\}\geq\gamma$ olduğu gösterilmelidir. Lemma 2.1.1 (ii) kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
&\left|(1-\gamma)B(z)+A(z)\right|-\left|(1+\gamma)B(z)-A(z)\right|\\
&\geq(2-\gamma)|z|-\sum_{n=2}^{\infty}|ke^{i\theta}(n-1)+n+1-\gamma|\,\Gamma_h\,|A_n||z|^n\\
&\quad-\sum_{n=1}^{\infty}|ke^{i\theta}(n+1)+n-1+\gamma|\,\Gamma_g\,|B_n||z|^n-\gamma|z|\\
&\quad-\sum_{n=2}^{\infty}|ke^{i\theta}(n-1)+n-1-\gamma|\,\Gamma_h\,|A_n||z|^n\\
&\quad-\sum_{n=1}^{\infty}|ke^{i\theta}(n+1)+n+1+\gamma|\,\Gamma_g\,|B_n||z|^n
\end{aligned}$$

$$\geq 2(1-\gamma)|z|\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{k(n-1)+n-\gamma}{1-\gamma}\Gamma_h|A_n||z|^{n-1}\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k(n+1)+n+\gamma}{1-\gamma}\Gamma_g|B_n||z|^{n-1}\right\}$$

$$>2(1-\gamma)|z|\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{k(n-1)+n-\gamma}{1-\gamma}\Gamma_h|A_n|-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k(n+1)+n+\gamma}{1-\gamma}\Gamma_g|B_n|\right\}$$

elde edilir. Bu son ifade (3.13) koşulu gereği pozitiftir.

Tersine, $f\in V_H US(k,\gamma)$ olsun. O halde,

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\left(ke^{i\theta}+1\right)\left(zH'(z)-\overline{zG'(z)}\right)}{H(z)+\overline{G(z)}}-(ke^{i\theta}+\gamma)\right\}\geq 0$$

veya

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{(1-\gamma)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(ke^{i\theta}(n-1)+n-\gamma\right)\Gamma_h|A_n|r^{n-1}e^{i(\alpha_n+(n-1)\eta)}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}\Gamma_h|A_n|r^{n-1}e^{i(\alpha_n+(n-1)\eta)}+\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_g|B_n|r^{n-1}e^{-i(\beta_n+(n+1)\eta)}}\right.$$

$$\left.\frac{-\sum_{n=1}^{\infty}\left(ke^{i\theta}(n+1)+n+\gamma\right)\Gamma_g|B_n|r^{n-1}e^{-i(\beta_n+(n+1)\eta)}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}\Gamma_h|A_n|r^{n-1}e^{i(\alpha_n+(n-1)\eta)}+\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_g|B_n|r^{n-1}e^{-i(\beta_n+(n+1)\eta)}}\right\}\geq 0$$

olur. $r\to 1^-$ ve η (3.12) ile verildiği gibi olmak üzere, $\operatorname{Re}(-e^{i\theta})\geq -|e^{i\theta}|=-1$ olduğu kullanılırsa,

$$\frac{(1-\gamma)-\sum_{n=2}^{\infty}\left(k(n-1)+n-\gamma\right)\Gamma_h|A_n|-\sum_{n=1}^{\infty}\left(k(n+1)+n+\gamma\right)\Gamma_g|B_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty}\Gamma_h|A_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_g|B_n|}\geq 0$$

elde edilir. Bu, (3.13) koşulunun sağlandığını gösterir. □

3.3.2. Teorem. $f = h + \overline{g} \in V_H$ ve $i = 1,2$ için a_i, b_i, c_i birer pozitif reel sayı ve $k \geq 0$, $-1 \leq \gamma < 1$ olsun. Bu takdirde, $f \in V_H UC(k,\gamma)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\big(n(k+1)-(k+\gamma)\big)\Gamma_h \,|\, A_n \,| + \sum_{n=1}^{\infty} n\big(n(k+1)+(k+\gamma)\big)\Gamma_g \,|\, B_n \,| \leq 1-\gamma \tag{3.14}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. Teorem 3.3.2 nin ispatı bir önceki ispattaki adımlar izlenerek elde edilir. □

Goodman (1957) ve Ruscheweyh (1981) in yapmış olduğu komşuluk tanımları aşağıdaki şekilde geliştirildi.

3.3.3. Tanım. $f = h + \overline{g} \in V_H$ olsun. *f* fonksiyonunun $\delta-$komşuluğu

$$N_\delta(\Omega_c^{a,b} f;\, \Omega_c^{a,b} F) = \Big\{ F \in V_H \;:\; F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} C_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{D_n z^n} \text{ ve}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\, \Gamma_h |\, A_n - C_n \,| + \sum_{n=1}^{\infty} n \Gamma_g \,|\, B_n - D_n \,| \leq \delta, \quad \delta > 0 \Big\} \tag{3.15}$$

dir.

3.3.4. Tanım. $e(z) = z = \left(\Omega_c^{a,b} e\right)(z)$ özdeşlik fonksiyonu alınsın. $e(z)$ fonksiyonunun $\delta-$komşuluğu,

$$N_\delta(e;\, \Omega_c^{a,b} F) = \Big\{ F \in V_H \;:\; F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} C_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{D_n z^n} \text{ ve}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \Gamma_h |\, C_n \,| + \sum_{n=1}^{\infty} n \Gamma_g \,|\, D_n \,| \leq \delta, \quad \delta > 0 \Big\} \tag{3.16}$$

dir.

3.3.5. Teorem. $\delta = \dfrac{2(1-\gamma)}{k+2-\gamma}$ ise $V_H US(k,\gamma) \subset N_\delta(e;\ \Omega_c^{a,b} F)$ dir.

İspat. $F \in V_H US(k,\gamma)$ olsun. Teorem 3.3.1 kullanıldığında,

$$
\begin{aligned}
&(k+1)\left[\sum_{n=2}^{\infty} n\Gamma_h |C_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma_g |D_n|\right] \\
&\leq 1-\gamma + (k+\gamma)\sum_{n=2}^{\infty}\Gamma_h |C_n| - (k+\gamma)\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_g |D_n| \\
&\leq 1-\gamma + (k+\gamma)\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\Gamma_h |C_n| + \sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_g |D_n|\right\} \\
&\leq 1-\gamma + \frac{(k+\gamma)}{2}\left\{\sum_{n=2}^{\infty} n\Gamma_h |C_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma_g |D_n|\right\}
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece,

$$
\sum_{n=2}^{\infty} n\Gamma_h |C_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma_g |D_n| \leq \frac{2(1-\gamma)}{k+2-\gamma} = \delta
$$

bulunur ve (3.16) gereği ispat tamamlanır. □

3.3.6. Sonuç. i) $\delta = \dfrac{2(1-\gamma)}{2-\gamma}$ ise $V_H S(0,\gamma) \subset N_\delta(e;\Omega_1^{1,1} F)$,

ii) $\delta = \dfrac{2(1-\gamma)}{3-\gamma}$ ise $V_H S(1,\gamma) \subset N_\delta(e;\Omega_1^{1,1} F)$,

iii) $\delta = \dfrac{2(1-\gamma)}{2-\gamma}$ ise $V_H S(0,\gamma) \subset N_\delta(e;\Omega_1^{m+1,1} F)$ dir.

3.3.7. Teorem. $\delta = \dfrac{1-\gamma}{k+2-\gamma}$ ise $V_H UC(k,\gamma) \subset N_\delta(e;\ \Omega_c^{a,b} F)$ dir.

İspat. $F \in V_H UC(k,\gamma)$ olsun. $F \in N_\delta(e;\,\Omega_c^{a,b}F)$ olduğunu göstermek için F nin (3.16) eşitsizliğini sağladığını göstermek yeterlidir. Teorem 3.3.2 den,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\big(2(k+1)-(k+\gamma)\big)\Gamma_h\,|C_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n\big(2(k+1)-(k+\gamma)\big)\Gamma_g\,|D_n| \le 1-\gamma$$

yazılır. Böylece,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\Gamma_h\,|C_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma_g\,|D_n| \le \frac{1-\gamma}{k+2-\gamma} = \delta$$

bulunur ve (3.16) gereği ispat tamamlanır. □

3.3.8. Sonuç. $\delta = \dfrac{1-\gamma}{2-\gamma}$ ise $V_H UC(0,\gamma) \subset N_\delta(e;\Omega_1^{1,1}F)$ dir.

3.3.9. Teorem. $f \in V_H UC(k,\gamma)$ olsun. $\delta \le \dfrac{1-\gamma}{3k+2+\gamma}$ ise

$$N_\delta(\Omega_c^{a,b} f;\,\Omega_c^{a,b}F) \subset V_H US(k,\gamma)$$

dir.

İspat. $F \in N_\delta(\Omega_c^{a,b} f;\Omega_c^{a,b}F)$ olsun. $F \in V_H US(k,\gamma)$ olduğunu göstermek için F nin (3.13) koşulunu sağladığını göstermek yeterlidir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}\big(n(k+1)-(k+\gamma)\big)\Gamma_h\,|C_n| + \sum_{n=1}^{\infty}\big(n(k+1)+(k+\gamma)\big)\Gamma_g\,|D_n| \\
&\le \sum_{n=2}^{\infty}\big(n(k+1)-(k+\gamma)\big)\Gamma_h\,|C_n-A_n| + \sum_{n=1}^{\infty}\big(n(k+1)+(k+\gamma)\big)\Gamma_g\,|D_n-B_n| \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\big(n(k+1)-(k+\gamma)\big)\Gamma_h\,|A_n| + \sum_{n=1}^{\infty}\big(n(k+1)+(k+\gamma)\big)\Gamma_g\,|B_n|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (k+1)\left\{\sum_{n=2}^{\infty} n\Gamma_h |C_n - A_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma_g |D_n - B_n|\right\} \\
&+ (k+\gamma)\left\{\sum_{n=2}^{\infty} \Gamma_h |C_n - A_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_g |D_n - B_n|\right\} \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \big(n(k+1) - (k+\gamma)\big)\Gamma_h |A_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \big(n(k+1) + (k+\gamma)\big)\Gamma_g |B_n| \\
&\leq (k+1)\left\{\sum_{n=2}^{\infty} n\Gamma_h |C_n - A_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma_g |D_n - B_n|\right\} \\
&+ \frac{(k+\gamma)}{2}\left\{\sum_{n=2}^{\infty} n\Gamma_h |C_n - A_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma_g |D_n - B_n|\right\} \\
&+ \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=2}^{\infty} n\big(n(k+1) - (k+\gamma)\big)\Gamma_h |A_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n\big(n(k+1) + (k+\gamma)\big)\Gamma_g |B_n|\right\} \\
&\leq (k+1)\delta + \frac{(k+\gamma)}{2}\delta + \frac{1}{2}(1-\gamma)
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

bulunur.

$$
\delta \leq \frac{(1-\gamma)}{2} \; : \; \left[(k+1) + \frac{k+\gamma}{2}\right] = \frac{1-\gamma}{3k+2+\gamma}
$$

olduğundan, (3.17) de verilen eşitsizliğin sağ tarafı $1-\gamma$ dan daha büyük olamaz ve ispat tamamlanır. □

3.3.10. Sonuç. $f \in V_H UC(0,\gamma)$ olsun. Bu takdirde,

$$
\delta \leq \frac{1-\gamma}{2+\gamma}
$$

ise

$$
N_\delta(\Omega_1^{1,1} f; \Omega_1^{1,1} F) \subset V_H S(0,\gamma)
$$

dir.

3.3.11. Teorem. $f = h + \overline{g}$ (3.12) ile verildiği gibi alınsın. $f \in V_H UC(k,\gamma)$ ve $\delta \leq \dfrac{k+1+\gamma}{k+2-\gamma}$ ise

$$N_\delta(\Omega_c^{a,b} f; \Omega_c^{a,b} F) \subset SH^*$$

dır.

İspat. $f \in V_H UC(k,\gamma)$ ve $F \in N_\delta(\Omega_c^{a,b} f;\, \Omega_c^{a,b} F)$ olsun. $F \in SH^*$ olduğu gösterilmelidir. O halde,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} n\Gamma_h \,|\, C_n \,| + \sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma_g \,|\, D_n \,| \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} n\Gamma_h \,|\, C_n - A_n \,| + \sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma_g \,|\, D_n - B_n \,| + \sum_{n=2}^{\infty} n\Gamma_h \,|\, A_n \,| + \sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma_g \,|\, B_n \,| \\
&\leq \delta + \frac{1}{2(k+1)-(k+\gamma)} \left[\sum_{n=2}^{\infty} n\big(n(k+1)-(k+\gamma)\big)\Gamma_h \,|\, A_n \,| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} n\big(n(k+1)+(k+\gamma)\big)\Gamma_g \,|\, B_n \,| \right] \\
&\leq \delta + \frac{1}{2(k+1)-(k+\gamma)} \big(1-\gamma\big)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

bulunur.

$$\delta \leq 1 - \frac{1}{2(k+1)-(k+\gamma)} \big(1-\gamma\big) = \frac{k+1}{k+2-\gamma}$$

olduğundan, (3.18) de verilen eşitsizliğin sağ tarafı Teorem 1.4.7 gereği 1 den daha büyük olamaz ve ispat tamamlanır. □

3.3.12. Sonuç. $f \in V_H UC(0,\gamma)$ olsun. Bu takdirde,

$$\delta \leq \frac{1}{2-\gamma}$$

ise

$$N_\delta(\Omega_1^{1,1} f;\Omega_1^{1,1} F) \subset S_H^*$$

dır.

3.4. $L_p f(z)$ Operatörü ve $SH_\alpha^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$, $TSH_\alpha^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ Sınıfları

a_1,a_2,c_1,c_2 pozitif reel sayılar, $\lambda \geq 0$ ve (1.10) ile verilen $f = h + \overline{g}$ harmonik çok katlı fonksiyonları için,

$$D_\lambda f(z) = (1-\lambda)\left(h(z) + \overline{g(z)}\right) + \frac{\lambda}{p}\left(zh'(z) - \overline{zg'(z)}\right) = H(z) + \overline{G(z)},$$

$$\phi_1^p(a_1,c_1,z) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}} z^k,\ \phi_2^p(a_2,c_2,z) = \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}} z^k$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} L_p f(z) &:= L_p h(z) + \overline{L_p g(z)} \\ &= D_\lambda f(z) \,\tilde{*}\, \left(\phi_1^p(a_1,c_1,z) + \overline{\phi_2^p(a_2,c_2,z)}\right) \\ &= H(z) * \phi_1^p(a_1,c_1,z) + \overline{G(z) * \phi_2^p(a_2,c_2,z)}, \end{aligned}$$

ile tanımlansın.

$f = h + \overline{g} \in SH(n,p)$ için $L_p f(z)$ operatörü

$$L_p h(z) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} (\lambda(\tfrac{k}{p}-1)+1) \frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}} A_k z^k,$$

$$L_p g(z) = -\sum_{k=n+p-1}^{\infty} (\lambda(\tfrac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}} B_k z^k$$

olmak üzere, $L_p f(z) = L_p h(z) + \overline{L_p g(z)}$ şeklinde ifade edilebilir.

3.4.1. Uyarı.

(i) $f(z) \in SH(1,1)$ için, $L_1(a_1, c_1, a_2, c_2, 0) f(z)$ ile Ahuja tarafından tanımlanan ve çalışılan $L(f)$ (Ahuja 2007, 2008),

(ii) $f(z) \in SH(1,1)$ için, $L_1(n+1,1,n+1,1,0) f(z)$ ile harmonik fonksiyonlar için tanımlanan Ruscheweyh türev operatörü (Murugusundaramoorthy 2003),

(iii) $f(z) \in S(n,p)$ için, $L_p(a_1, c_1, a_2, c_2, \lambda) f(z)$ ile Mahzoon ve Latha (2009) tarafından çalışılmış olan $L_p(a, c, \lambda) f(z)$,

(iv) $f(z) \in S(1,p)$ için, $L_p(a_1, c_1, a_2, c_2, 0) f(z)$ ile Saitoh (1996) operatörü,

(v) $f(z) \in S(1,1)$ için, $L_p(a_1, c_1, a_2, c_2, 0) f(z)$ ile Carlson-Shaffer (1984) operatörü elde edilir.

$SH(n,p)$ sınıfının alt sınıfı olan $SH_\alpha^{n,p}(a_1, c_1, a_2, c_2, \lambda)$ sınıfı ile, (1.10) ile verilen $f = h + \overline{g} \in SH(n,p)$ fonksiyonlarından oluşan ve

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{z\left(L_p h(z)\right)' - \overline{z\left(L_p g(z)\right)'}}{L_p h(z) + \overline{L_p g(z)}} \right\} > \alpha p \tag{3.19}$$

($\lambda \geq 0,\ 0 \leq \alpha < 1,\ p \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ z \in U$)

şartını sağlayan fonksiyonların sınıfı gösterilsin.

$SH(n,p)$ sınıfının alt sınıfı olan $TSH(n,p)$ sınıfı,

$$h(z)=z^{p}-\sum_{k=n+p}^{\infty}A_{k}z^{k},\ \ g(z)=-\sum_{k=n+p-1}^{\infty}B_{k}z^{k},\ A_{k},B_{k}\geq 0 \tag{3.20}$$

formundaki h ve g fonksiyonlarından oluşan $f=h+\overline{g}$ fonksiyonlarının sınıfını göstersin.

$$TSH_{\alpha}^{n,p}(a_{1},c_{1},a_{2},c_{2},\lambda):=\ SH_{\alpha}^{n,p}(a_{1},c_{1},a_{2},c_{2},\lambda)\cap TSH(n,p)$$

ile tanımlansın.

$f=h+\overline{g}\in TSH(n,p)$ için

$$L_{p}h(z)=z^{p}-\sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_{1})_{k-p}}{(c_{1})_{k-p}}A_{k}z^{k},$$
$$L_{p}g(z)=\sum_{k=n+p-1}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_{2})_{k-p}}{(c_{2})_{k-p}}B_{k}z^{k}$$

olmak üzere, $L_{p}f(z)=L_{p}h(z)+\overline{L_{p}g(z)}$ şeklindedir.

$SH_{\alpha}^{n,p}(a_{1},c_{1},a_{2},c_{2},\lambda)$ sınıfına ait parametrelerin uygun seçimi ile harmonik yalınkat fonksiyonların daha önce çalışılmış birçok sınıfı elde edilir:

(i) $SH_{0}^{1,1}(1,1,1,1,0)=SH^{*}(0)$ (Avcı 1990, Silverman 1998, Silverman ve Silvia 1999),

(ii) $SH_{\alpha}^{1,1}(1,1,1,1,0)=SH^{*}(\alpha)$ (Jahangiri 1999, Silverman 1998, Silverman ve Silvia 1999),

(iii) $SH_{0}^{1,1}(1,1,1,1,1)=KH(0)$ (Avcı 1990, Silverman 1998, Silverman ve Silvia 1999),

(iv) $SH_{\alpha}^{1,1}(1,1,1,1,1)=KH(\alpha)$ (Jahangiri 1999, Silverman 1998, Silverman ve Silvia 1999),

(iii) $SH_{\alpha}^{n,p}(1,1,1,1,0) = SH(p,\alpha)$ (Ahuja ve Jahangiri 2001),

(iv) $SH_{\alpha}^{1,1}(n+1,1,n+1,1,0) = RH(n,\alpha)$ (Murugusundaramoorthy 2003).

3.4.2. Teorem. $f(z) \in SH(n,p)$ ve $\lambda \geq 0,\ \dfrac{p-1}{p} \leq \alpha < 1,\ p \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ z \in U$ olsun.

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} (\lambda(\tfrac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}(k-\alpha p)\,|A_k| + \sum_{k=n+p-1}^{\infty} |\lambda(\tfrac{k}{p}-1)+1|\,\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}(k+\alpha p)\,|B_k|$$

$$< p(1-\alpha) \tag{3.21}$$

ise $f \in SH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ dır.

İspat. $f \in SH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ olması için (3.19) gereği,

$$w = \frac{z\left(L_p h(z)\right)' - \overline{z\left(L_p g(z)\right)'} - \alpha p\left[L_p h(z) + \overline{L_p g(z)}\right]}{L_p h(z) + \overline{L_p g(z)}} := \frac{A(z)}{B(z)}$$

olmak üzere $\operatorname{Re}\{w\} > 0$ olduğu gösterilmelidir. Dolayısıyla Lemma 2.1.1 (i) gereği

$$\begin{aligned}
&|A(z)+B(z)| - |A(z)-B(z)| \\
&\geq \left[1+p(1-\alpha)\right]|z|^p - \sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}(k-\alpha p+1)\,|A_k|\,|z|^k \\
&- \sum_{k=n+p-1}^{\infty} |\lambda(\tfrac{k}{p}+1)-1|\,\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}(k+\alpha p+1)\,|B_k|\,|z|^k \\
&- |1-p(1-\alpha)|\,|z|^p - \sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}(k-\alpha p-1)\,|A_k|\,|z|^k \\
&- \sum_{k=n+p-1}^{\infty} |\lambda(\tfrac{k}{p}+1)-1|\,\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}(k+\alpha p-1)\,|B_k|\,|z|^k
\end{aligned}$$

$$\geq 2p(1-\alpha)|z|^p - 2\sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}(k-\alpha p)|A_k||z|^k$$

$$-2\sum_{k=n+p-1}^{\infty}|\lambda(\tfrac{k}{p}+1)-1|\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}(k+\alpha p)|B_k||z|^k$$

$$> 2p(1-\alpha)|z|^p \times \left\{1-\sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}\frac{(k-\alpha p)}{p(1-\alpha)}|A_k|\right.$$

$$\left.-\sum_{k=n+p-1}^{\infty}|\lambda(\tfrac{k}{p}+1)-1)|\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}\frac{(k+\alpha p)}{p(1-\alpha)}|B_k|\right\}$$

elde edilir. Bu son ifade (3.21) gereği negatif olamaz. Böylece, $f \in SH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ dır.

3.4.3. Teorem. $h(z)$ ve $g(z)$ (3.20) ile verildiği gibi olmak üzere, $f(z)=h(z)+\overline{g(z)} \in SH(n,p)$ fonksiyonu alınsın. Bu takdirde, $f(z) \in TSH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda \geq \frac{1}{2}, \frac{p-1}{p} \leq \alpha < 1,\ p \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}(k-\alpha p)A_k + \sum_{k=n+p-1}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}(k+\alpha p)B_k$$

$$< p(1-\alpha) \tag{3.22}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. Yeter koşul, $TSH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda) \subset SH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ olduğundan Teorem 3.4.2 ile ispatlanır. Gerek koşul için, (3.22) koşulu sağlanmadığında $f \notin TSH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ olduğu gösterilmelidir. $f=h+\overline{g}$ fonksiyonunun $TSH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ sınıfına ait olması için gerekli ve yeterli koşul (3.19) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

(3.19) koşulu,

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{p(1-\alpha)z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\frac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}(k-\alpha p)A_k z^k}{z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\frac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}A_k z^k+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}(\lambda(\frac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}B_k\overline{z}^k}\right.$$
$$\left.-\frac{\sum_{k=n+p-1}^{\infty}(\lambda(\frac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}(k+\alpha p)B_k\overline{z}^k}{z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\frac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}A_k z^k+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}(\lambda(\frac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}B_k\overline{z}^k}\right\}\geq 0$$

eşitsizliğine denktir. Bu durum, $|z|=r<1$ şeklindeki her z için sağlanmalıdır. Reel eksen üzerindeki $0\leq z=r<1$ formundaki z ler için de eşitsizliğin sağlanması gerektiğinden

$$\frac{p(1-\alpha)-\sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\frac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}(k-\alpha p)A_k r^{k-p}}{1-\sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\frac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}A_k r^{k-p}+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}(\lambda(\frac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}B_k r^{k-p}}$$
$$-\frac{\sum_{k=n+p-1}^{\infty}(\lambda(\frac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}(k+\alpha p)B_k r^{k-p}}{1-\sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\frac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}A_k r^{k-p}+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}(\lambda(\frac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}B_k r^{k-p}}\geq 0 \tag{3.23}$$

elde edilir.

Eğer, (3.22) koşulu sağlanmıyor ise (3.23) ün payı $r\to 1^-$ için negatif olur. Böylece, (3.23) deki kesri negatif yapan $(0,1)$ aralığında bir $z_0=r_0$ değeri vardır. Bu durum, $f\in TSH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ ile çelişir ve ispat tamamlanır.

3.4.4. Teorem. $f \in TSH_{\alpha}^{n,p}(a_1, c_1, a_2, c_2, \lambda)$ ve $a_1 c_2 < a_2 c_1$ olsun. Bu takdirde, $|z| = r < 1$ için

$$|f(z)| \leq \left(1 + B_{n+p-1}\right) r^p + \left[\frac{p(1-\alpha)(c_1)_n}{(\frac{\lambda n}{p}+1)\left[n + p(1-\alpha)\right](a_1)_n} - \frac{\left[\lambda\left(\frac{n-1}{p}+2\right)-1\right](a_2)_{n-1}(c_1)_n\left[n-1+p(1+\alpha)\right]}{(\frac{\lambda n}{p}+1)\,(c_2)_{n-1}(a_1)_n\left[n+p(1-\alpha)\right]} B_{n+p-1} \right] r^{n+p}$$

ve

$$|f(z)| \geq \left(1 - B_{n+p-1}\right) r^p - \left[\frac{p(1-\alpha)(c_1)_n}{(\frac{\lambda n}{p}+1)\left[n + p(1-\alpha)\right](a_1)_n} - \frac{\left[\lambda\left(\frac{n-1}{p}+2\right)-1\right](a_2)_{n-1}(c_1)_n\left[n-1+p(1+\alpha)\right]}{(\frac{\lambda n}{p}+1)(c_2)_{n-1}(a_1)_n\left[n+p(1-\alpha)\right]} B_{n+p-1} \right] r^{n+p}$$

dir.

İspat. $f \in TSH_{\alpha}^{n,p}(a_1, c_1, a_2, c_2, \lambda)$ olsun. f nin mutlak değeri alındığında ve (3.22) kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \left(1 + B_{n+p-1}\right) r^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} \left(A_k + B_k\right) r^k \\
&\leq \left(1 + B_{n+p-1}\right) r^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} \left(A_k + B_k\right) r^{n+p} \\
&= \left(1 + B_{n+p-1}\right) r^p + \frac{p(1-\alpha)(c_1)_n}{(\frac{\lambda n}{p}+1)\left[n+p(1-\alpha)\right](a_1)_n} \\
&\quad \times \sum_{k=n+p}^{\infty} \left(\frac{\lambda n}{p}+1\right) \frac{(a_1)_n}{(c_1)_n} \frac{n+p(1-\alpha)}{p(1-\alpha)} \left(A_k + B_k\right) r^{n+p}
\end{aligned}$$

$$\le \left(1+B_{n+p-1}\right)r^{p}+\left(\frac{p(1-\alpha)(c_1)_n}{(\frac{\lambda n}{p}+1)\,\left[n+p(1-\alpha)\right](a_1)_n}\right)$$

$$\times\left[\sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}\frac{(k-\alpha p)}{p(1-\alpha)}A_k r^{n+p}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}\frac{(k+\alpha p)}{p(1-\alpha)}B_k r^{n+p}\right]$$

$$\le \left(1+B_{n+p-1}\right)r^{p}+\left[\frac{p(1-\alpha)\,(c_1)_n}{(\frac{\lambda n}{p}+1)\,\left[n+p(1-\alpha)\right](a_1)_n}\right.$$

$$\left.-\frac{\left[\lambda\left(\frac{n-1}{p}+2\right)-1\right](a_2)_{n-1}\,(c_1)_n\left[n-1+p(1+\alpha)\right]}{(\frac{\lambda n}{p}+1)\,(c_2)_{n-1}\,(a_1)_n\left[n+p(1-\alpha)\right]}B_{n+p-1}\right]r^{n+p}$$

bulunur. Eşitsizliğin diğer yönü de benzer şekilde ispatlanır.

Sıradaki sonuç Teorem 3.4.4 de verilen ikinci eşitsizlikten elde edilir.

3.4.5. Sonuç. $f\in TSH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ ve $a_1c_2<a_2c_1$ olsun. Bu takdirde,

$$\left\{w\ :\ |w|<\left[\frac{(\frac{\lambda n}{p}+1)\,\left[n+p(1-\alpha)\right](a_1)_n-p(1-\alpha)\,(c_1)_n}{(\frac{\lambda n}{p}+1)\,\left[n+p(1-\alpha)\right](a_1)_n}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(\frac{\lambda n}{p}+1)\,(c_2)_{n-1}\,(a_1)_n\left[n+p(1-\alpha)\right]-\left[\lambda\left(\frac{n-1}{p}+2\right)-1\right](a_2)_{n-1}\,(c_1)_n\left[n-1+p(1+\alpha)\right]}{(\frac{\lambda n}{p}+1)(c_2)_{n-1}(a_1)_n\left[n+p(1-\alpha)\right]}B_{n+p-1}\right]\right\}$$

$$\subset f(U)$$

dur.

3.4.6. Teorem. $f\in TSH(n,p)$ olsun. Bu takdirde, $f\in TSH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$h_{n+p-1}(z)=z^{p},$$

$$h_k(z)=z^p-\frac{p(1-\alpha)}{(\lambda(\frac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}(k-\alpha p)}z^k,\ (k=n+p,n+p+1,...)$$

$$g_k(z)=z^p-\frac{p(1-\alpha)}{(\lambda(\frac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}(k+\alpha p)}\bar{z}^k,\ (k=n+p-1,n+p,...)$$

$$x_{n+p-1}\equiv x_p=1-\left(\sum_{k=n+p}^{\infty}x_k+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}y_k\right),\ x_k\geq 0,\ y_k\geq 0$$

olmak üzere,

$$f(z)=\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\left(x_k h_k(z)+y_k g_k(z)\right)$$

şeklinde yazılmasıdır. Ayrıca, $TSH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ nin ekstrem noktaları $\{h_k\}$ ve $\{g_k\}$dır.

İspat.

$$\begin{aligned} f(z)&=\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\left(x_k h_k(z)+y_k g_k(z)\right)\\ &=z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{p(1-\alpha)}{(\lambda(\frac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}(k-\alpha p)}x_k z^k\\ &\quad-\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\frac{p(1-\alpha)}{(\lambda(\frac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}(k+\alpha p)}y_k\bar{z}^k \end{aligned}$$

olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}\frac{(k-\alpha p)}{p(1-\alpha)}\frac{p(1-\alpha)}{(\lambda(\frac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}(k-\alpha p)}x_k\\ &+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}\frac{(k+\alpha p)}{p(1-\alpha)}\frac{p(1-\alpha)}{(\lambda(\frac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}(k+\alpha p)}y_k\\ &=\sum_{k=n+p}^{\infty}x_k+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}y_k=1-x_p\leq 1 \end{aligned}$$

olduğundan $f \in TSH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ dır. Tersine, $f \in TSH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ olsun.

Dolayısıyla,

$$A_k \leq \frac{(c_1)_{k-p}\left[p(1-\alpha)\right]}{(\lambda(\frac{k}{p}-1)+1)(a_1)_{k-p}(k-\alpha p)}$$

$$B_k \leq \frac{(c_2)_{k-p}\left[p(1-\alpha)\right]}{(\lambda(\frac{k}{p}+1)-1)(a_2)_{k-p}(k+\alpha p)}$$

dir. $x_p \geq 0$ olmak üzere,

$$x_k = (\lambda(\tfrac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}\frac{(k-\alpha p)}{p(1-\alpha)}A_k, (k=n+p, n+p+1,...)$$

$$y_k = (\lambda(\tfrac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}\frac{(k+\alpha p)}{p(1-\alpha)}B_k, (k=n+p-1, n+p,...)$$

ve

$$x_p = 1-\left(\sum_{k=n+p}^{\infty} x_k + \sum_{k=n+p-1}^{\infty} y_k\right)$$

alınsın. Böylece istenildiği gibi,

$$f(z) = x_p z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} x_k h_k(z) + \sum_{k=n+p-1}^{\infty} y_k g_k(z)$$

elde edilir.

3.4.7. Teorem. $TSH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ sınıfı konveks kombinasyonları üzerinde kapalıdır.

İspat. $i=1,2,...$ için

$$f_i(z)=z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}A_{k_i}z^k-\sum_{k=n+p-1}^{\infty}B_{k_i}\overline{z}^k$$

olmak üzere, her bir $f_i\in TSH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ olsun. Böylece, (3.22) gereği,

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}\frac{(k-\alpha p)}{p(1-\alpha)}A_{k_i}+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}\frac{(k+\alpha p)}{p(1-\alpha)}B_{k_i}<1 \tag{3.24}$$

yazılabilir. $0\le t_i\le 1$ olmak üzere, $\sum_{i=1}^{\infty}t_i=1$ için f_i nin konveks kombinasyonu

$$\sum_{i=1}^{\infty}t_i f_i(z)=z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}t_iA_{k_i}\right)z^k-\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}t_iB_{k_i}\right)\overline{z}^k$$

şeklinde yazılır. (3.24) den,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}\frac{(k-\alpha p)}{p(1-\alpha)}\left(\sum_{i=1}^{\infty}t_iA_{k_i}\right)\\
&+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}\frac{(k+\alpha p)}{p(1-\alpha)}\left(\sum_{i=1}^{\infty}t_iB_{k_i}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}t_i\left\{\sum_{k=n+p}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}-1)+1)\frac{(a_1)_{k-p}}{(c_1)_{k-p}}\frac{(k-\alpha p)}{p(1-\alpha)}A_{k_i}\right.\\
&\left.+\sum_{k=n+p-1}^{\infty}(\lambda(\tfrac{k}{p}+1)-1)\frac{(a_2)_{k-p}}{(c_2)_{k-p}}\frac{(k+\alpha p)}{p(1-\alpha)}B_{k_i}\right\}\\
&\le\sum_{i=1}^{\infty}t_i=1
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla, $\sum_{i=1}^{\infty}t_if_i(z)\in TSH_{\alpha}^{n,p}(a_1,c_1,a_2,c_2,\lambda)$ olduğu elde edilir.

4. SONUÇ

Bu doktora tezinde, harmonik yalınkat ve harmonik çok katlı fonksiyonlara Salagean türev operatörünü uygulayarak ve harmonik yalınkat ve harmonik çok katlı fonksiyonların hipergeometrik fonksiyonlarla konvolüsyonunu ele alarak bazı yeni sınıflar tanımlanmıştır. Tanımlanan sınıfların katsayı koşulları, distorsiyon sınırları, ekstrem noktaları ve özellikle de komşulukları araştırılmıştır.

Tezin ikinci bölümü Salagean türev operatörünün harmonik yalınkat ve harmonik çok katlı fonksiyonlara uygulaması üzerinedir. Bu bölüm üç alt başlık altında verilmiştir. Birinci kısım, bölüm için gerekli ön bilgilere ayrılmıştır. İkinci kısımda, harmonik yalınkat fonksiyonun Salagean türevi alınmış ve elde edilen harmonik fonksiyonun b kompleks mertebeli üç sınıfı tanımlanmıştır. Bu sınıflar $\overline{SH}(m,b)$, $\overline{SH_1}(m,b)$ ve $\overline{SH_2}(m,b)$ ile gösterilmiştir. Sınıflar arasındaki ilişkiler araştırılmış ve

(i) $\overline{SH_1}(m,b) \subseteq \overline{SH}(m,b)$,

(ii) $\overline{SH}(m,b) \subseteq \overline{SH_2}(m,b)$,

(iii) $b \in (0,1]$ ise $\overline{SH_1}(m,b) = \overline{SH}(m,b) = \overline{SH_2}(m,b)$,

(iv) $b \in [-\infty,0)$ veya $\operatorname{Re} b \in (-1/2,0)$ ise $\overline{SH_2}(m,b) \not\subseteq \overline{SH}(m,b)$,

(v) $b \in (-\infty,0)$ veya $b \in (1,\infty)$ ise, $\overline{SH}(m,b) \not\subseteq \overline{SH_1}(m,b)$

sonuçları elde edilmiştir (Yaşar ve Yalçın 2011a). Üçüncü kısımda, harmonik çok katlı fonksiyonların q. mertebeden türevi ile Salagean türevlerinin alınmasıyla oluşturulan yeni bir sınıfı tanımlanmıştır. Bu sınıfın katsayı gerek ve yeter koşulu, distorsiyon sınırları, ekstrem noktaları elde edilmiştir. Ayrıca, harmonik çok katlı fonksiyonların ve özdeşlik fonksiyonunun ($e(z) = z$) δ-komşuluklarının kümesi tanımlanmış ve tespit edilen özel δ değerleri için,

(i) $\overline{SH}^{m}_{n,p}(q,\lambda,\alpha) \subset N^{\delta}_{n,p}(e^{(q)};\, s^{(q)}_{m})$,

(ii) $\overline{SH}^{0}_{1,p}(0,0,\alpha) \subset N^{\delta}_{1,p}(e^{(0)};\, s^{(0)}_{m})$,

(iii) $\overline{SH}^{0}_{1,p}(0,0,0) \subset N^{\delta}_{1,p}(e^{(0)};\ s^{(0)}_{m})$,

(iv) $\overline{SH}^{1}_{1,1}(0,0,0) \subset N^{\delta}_{1,1}(e^{(0)};\ s^{(0)}_{m})$,

(v) $\overline{SH}^{m}_{1,1}(0,0,0) \subset N^{\delta}_{1,1}(e^{(0)};\ s^{(0)}_{m})$,

(vi) $N^{\delta}_{n,p}(f^{(q)}_{m};\ s^{(q)}_{m}) \subset SH^{*}(n,p)$,

(vii) $\overline{SH}^{m}_{1,1}(0,0,0) \subset N^{\delta}_{1,1}(f^{(0)}_{m};\ s^{(0)}_{m})$

sonuçları elde edilmiştir (Yaşar ve Yalçın 2011b).

Tezin üçüncü bölümü, harmonik yalınkat ve harmonik çok katlı fonksiyonların hipergeometrik fonksiyonlarla konvolüsyonları üzerinedir. Bu bölüm dört alt başlık altında verilmiştir. Birinci kısımda, bölüm için gerekli ön bilgiler verilmiştir. İkinci kısımda, harmonik yalınkat fonksiyonların hipergeometrik fonksiyonlarla konvolüsyonları ile elde edilen ve Ahuja tarafından tanımlanan lineer operatör ele alınarak harmonik yalınkat fonksiyonların kompleks mertebeli yeni bir sınıfı tanımlanmıştır. Bu sınıfın katsayı gerek ve yeter koşulu , hipergeometrik fonksiyonlar aracılığıyla tanımlanan yeni harmonik fonksiyonun sınıfa ait olma koşulu, harmonik yıldızıl ve harmonik konveks fonksiyonların operatör altındaki görüntüsünün hangi koşullar altında tanımlanan sınıfın alt kümesi olabileceği elde edilmiştir (Yaşar ve Yalçın 2010). Üçüncü kısımda, ikinci kısımda kullanılan operatör yardımıyla harmonik yalınkat fonksiyonların iki farklı sınıfı ($V_H US(k,\gamma)$ ve $V_H UC(k,\gamma)$) tanımlanmıştır. Sınıfların katsayı gerek ve yeter koşulu elde edilmiştir. Ayrıca, harmonik yalınkat fonksiyonun operatör altındaki görüntüsünün ve özdeşlik fonksiyonunun ($e(z)=z$) δ-komşuluklarının kümesi tanımlanmış, özel δ değerleri için,

(i) $V_H US(k,\gamma) \subset N_{\delta}(e;\ \Omega^{a,b}_{c}F)$,

(ii) $V_H S(0,\gamma) \subset N_{\delta}(e;\Omega^{1,1}_{1}F)$,

(iii) $V_H S(1,\gamma) \subset N_{\delta}(e;\Omega^{1,1}_{1}F)$,

(iv) $V_H S(0,\gamma) \subset N_{\delta}(e;\Omega^{m+1,1}_{1}F)$,

(v) $V_H UC(k,\gamma) \subset N_\delta(e;\ \Omega_c^{a,b} F)$,

(vi) $V_H UC(0,\gamma) \subset N_\delta(e; \Omega_1^{1,1} F)$

(vii) $N_\delta(\Omega_c^{a,b} f;\ \Omega_c^{a,b} F) \subset V_H US(k,\gamma)$,

(viii) $N_\delta(\Omega_1^{1,1} f;\ \Omega_1^{1,1} F) \subset V_H S(0,\gamma)$,

(ix) $N_\delta(\Omega_c^{a,b} f; \Omega_c^{a,b} F) \subset SH^*$

(x) $N_\delta(\Omega_1^{1,1} f; \Omega_1^{1,1} F) \subset S_H^*$

sonuçları elde edilmiştir. Dördüncü kısımda, harmonik çok katlı fonksiyonların hipergeometrik fonksiyonlarla konvolüsyonundan oluşan yeni bir lineer operatör tanımlanmıştır. Bu operatör yardımıyla oluşturulan harmonik çok katlı fonksiyonların yeni bir sınıfı tanımlanmış, bu sınıfın katsayı gerek ve yeter koşulu, distorsiyon sınırları, ekstrem noktaları elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Ahlfors, L.V. 1979. Complex analysis. Mcgraw Hill, New York, USA, 336 pp.

Ahuja, O.P., Jahangiri, J.M. 2001. Multivalent harmonic starlike functions. *Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A*, 55(1): 1-13.

Ahuja, O.P. 2005. Planar harmonic univalent and related mappings. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 6(4): No. 122.

Ahuja, O.P., Aghalary, R., Joshi, S. B. 2005. Harmonic univalent functions associated with k-uniformly starlike functions. *Math. Sci. Res. J.*, 9(1): 9-17.

Ahuja, O.P. 2007. Planar harmonic convolution operators generated by hypergeometric functions. *Integral trans. Spec. Func.*, 18(3): 165-177.

Ahuja, O.P. 2008. Connections between various subclasses of planar harmonic mappings involving hypergeometric functions. *Appl. Math. Comp.*, 198(1): 305-316.

Alexander, J.W. 1915. Functions which map the interior of the unir circle upon simple regions. *Ann. of Math.*, 17: 12-22.

Altıntaş, O., Owa, S. 1996. Neighborhoods of certain analytic functions with negative coefficients. *Int. J. Math. and Math. Sci.*, 19(4): 797-800.

Altıntaş, O. 2007. Neighborhoods of certain p-valently analytic functions with negative coefficients. *Appl. Math. Comp.*, 187: 47-53.

Altıntaş, O., Irmak, H., Srivastava, H.M. 2008. Neighborhoods for certain subclasses of multivalently analytic functions defined by using a differential operator. *Computers and Mathematics with Applications*, 55: 331-338.

Avcı, Y., Zlotkiewicz, E. 1990. On harmonic univalent mappings. *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect. A*, 44: 1-7.

Baernstain, L. 1974. Integral means, univalent functions and circular symmetrization. *Acta Math.*, 133: 139-169.

Bieberbach, L. 1916. Über die koeffizienten derjenigen potenzreihen. *Welcheeine schlichte abbildung des einheitskreises vermitteln, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl.*, 940–955.

Bostancı, H. 2009. Meromorf harmonik fonksiyonlar. *Doktora Tezi*, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.

Branges, L. 1985. A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Mathematica*, 154: 137-

152.
Carlson, B.C., Shaffer, D.B. 1984. Starlike and prestarlike hypergeometric functions. *SIAM J. Math. Anal.*,15:737-745.
Choi, J.H., Saigo, M., Srivastava, H.M. 2002. Some inclusion properties of a certain family of integral operators. *J. Math. Anal. Appl*., 276: 432-445.
Clunie, J. Sheil-Small, T. 1984. Harmonic univalent functions. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math*,. 9: 3-25.
Duren, P. 2004. Harmonic mappings in the plane. Cambridge Univesity Pres, New York, USA, 212 pp.
Dziok, J., Srivastava, H.M. 2003. Certain subclasses of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function. *Integral transforms and special func*., 14: 7-18.
Fitz Gerald, C.H. 1972. Quadratic inequalities and coefficient estimates for schlicht functions. *Arch. Rat. Mech. Anal*., 46: 356-368.
Frasin, B.A. 2007. Neighborhoods of certain multivalent functions with negative coefficients. *Appl. Math. Comp.*, 193: 1-6.
Galuzin, G.M. 1969. Geometric theory of functions of a complex variable. *Amer. Math. Soc*., 676 pp.
Goodman, A.W. 1957. Univalent functions and non-analytic curves. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8: 598-601.
Goodman, A.W. 1983. Univalent Functions, Vols. I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey, 556 pp.
Goodman, A.W. 1991. On uniformly convex functions. *Annales Polonici Mathematici*, 56(1):.87-92.
Hengartner, W., Schober, G. 1986. Harmonic mappings with given dilatation. *J. London Math. Soc.*, 33:473-483.
Hohlov, Yu. E. 1978. Operators and operations in the class of univalent functions, *Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika*, 10: 83-89 (Rusça).
Horowitz, D. 1978. A refinement for coefficient estimates of univalent functions. *Proc. Amer. Math. Soc*., 54: 176-178.
Jahangiri, J.M. 1998. Coefficient bounds and univalence criteria for harmonic functions with negative coefficients, *Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska Sect A*., 52

:57-66.

Jahangiri, J.M. 1999. Harmonic functions starlike in the unit disk. *J. Math. Anal. Appl*., 235: 470-477.

Jahangiri, J.M., Silverman, H. 2002. Harmonic univalent functions with varying arguments. *Int. J. Appl. Math.*, 8(3): 267-275.

Jahangiri, J.M., Murugusundaramoorthy, G., Vijaya, K. 2002. Salagean-type harmonic univalent functions. *South J. Pure Appl. Math.*, 2: 77-82.

Kanas, S., Wisniowska, A. 1999. Conic regions and k-uniform convexity. *J. Comp. and Appl. Math.*, 105: 327-336.

Kaplan, W. 1952. Close-to-convex schlicht functions. *Michigan Math. J*., 1: 169-185.

Kim, Y.C., Jahangiri, J.M., Choi, J.H. 2002. Certain convex harmonic functions, *Int.J.. Math. Sci.*, 29(8): 459-465.

Koebe, P. 1907. Über die uniformisierung beliebeger analytischer kurven. *Nach. Ges. Wiss. Gottingen*, 191-210.

Littlewood, J.E. 1925. On inequalities in the theory of functions. *Proc. London Math. Soc*., 28: 482,519.

Mahzoon, H., Latha, S. 2009. On certain properties of neighborhoods of multivalent functions involving the generalized Saitoh operator, *JIPAM*, 10(4): Article 112 , 6 pp.

Murugusundaramaoorthy, G. 2003. A class of Ruscheweyh-type harmonic univalent functions with varying arguments. *Souhwest Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2: 90-95.

Nasr, M. A., Aouf, M.K. 1985. Starlike function of complex order. *J. Natural Sci. and Math.*, 25(1): 1-12.

Nevanlinna, R. 1921. Uber die Konforme Abbildung von Sterngebieten. *Oversiktav Finska Vetenskaps-Societetens Forhandlingar,* 6(63): 1-21.

Nunokawa, M. 1987. On the theory of multivalent functions. *Tsukaba J. Math.*, 11(2): 273-286.

Owa, S. 1978. On the distortion theorems I. *Kyungpook Math. J*., 18: 53-59.

Owa, S., Srivastava, H.M. 1987. Univalent and starlike generalized hypergeometric functions. *Canad. J. Math*., 39: 1057-1077.

Owa, S. 1991. Open problems in: Proc. of Int. Conference on New Trends in Geom. Func. Theory and Appl., Madras 1990, Ed.: Parvatham, R. Ponnusamy, S., World Sci.

Pub., Singapore.

Owa, S. Salagean, G.S. 1998a. On an open problem of S. Owa. *J. Math. Anal. Appl.*, 218: 453-457.

Owa, S. Salagean, G.S. 1998b. Starlike or convex of complex order functions with negative coefficients. *RIMS Kokyuroku*, 1062: 77-83.

Öztürk, M. 1995. Reel kısmı pozitif ve tipik reel harmonik fonksiyonlar. *Hacettepe Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 16:79-89.

Riemann, B. 1851. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. *PhD Thesis*, University of Göttingen, Germany.

Robertson, M. S. 1936. On the theory of univalent functions. *Ann. of Math.*, 37: 374-408.

Rosy, T., Stephen, B.A., Subramanian, K.G. 2001. Goodman-Ronning-type harmonic univalent functions, *Kyungpook Math. J.*, 41: 45-54.

Ruscheweyh, S. 1975. New criteria for univalent functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 49: 109-115.

Ruscheweyh, S. 1981. Neighborhoods of univalent functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 81(4): 521-527.

Ruscheweyh, S., Singh, V. 1986. On the order of starlikeness of hypergeometric functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 113: 1-11.

Saitoh, H. 1996. A linear operator and its applications of first order differential subordinations. *Math. Japon*, 44(1): 31-38.

Salagean, G.S. 1983. Subclasses of univalent functions. *Lecture Notes in Math.*, Springer- Verlag, Heidelberg, 1013: 362-372.

Sheil-Small, T. 1990. Constants for planar harmonic mappings. *J. London Math. Soc.*, 42(2):237-248.

Silverman, H. 1975. Univalent functions with negative coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 51: 109-116.

Silverman, H. 1998. Harmonic univalent functions with negative coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, 220: 283-289.

Silverman, H., Silvia, E.M. 1999. Subclasses of harmonic univalent functions. *N. Z. J. Math.*, 28: 275-284.

Silverman, H., Murugusundaramaoorthy, G., Vijaya, K. 2009. A class of starlike functions defined by the Dziok-Srivastava operator. *Kyungpook Math. J.*, 49: 95-106.

Srivastava, H.M. Owa, S. 1992. Current Topics in Analytic Function Theory. World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey, London and Hong Kong, 472 pp.

Study, S. 1913. Vorlesungen uber ausgewahlte gegenstande der geometrie. heft 2, Konforme Abbildung Einfach Zusammenhangender Bereiche, B. G. Teubner, Leibzig und Berlin: No. 0411593.

Şeker, B. 2008. Harmonik yalınkat ve harmonik çok katlı fonksiyonların bazı alt sınıfları. *Doktora Tezi*, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Diyarbakır.

Wiatrowski, P. 1970. The coefficients of a certain family of holomorphic functions. *Zeszyty Nauk. Lodz Nauk. Math. Przyrod Ser. II*, 39: 75-85.

Yalçın, S. 2005. A new class of Salagean-type harmonic univalent functions. *Applied Mathematics Letters*, 18: 191-198.

Yalçın, S., Bostancı, H., Öztürk, M. 2006. New classes of Salagean-type multivalent harmonic functions. *Mathematica (Cluj)-Tome*, 48(71): No. 1.

Yaşar, E. Yalçın, S. 2010. On a subclass of harmonic univalent functions of complex order. Proceedings Volume of International Symposium On Geometric Function Theory and Applications, 27-31 August, Sofia, Bulgaria, pp:295-300.

Yaşar, E., Yalçın, S. 2011a. Harmonic univalent functions starlike or convex of complex order. *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences*, 27(3):269-277.

Yaşar, E., Yalçın, S. 2011b. Neighborhoods of a new class of harmonic multivalent functions. *Comp. Math. Appl.*,62:462-473.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Elif YAŞAR
Doğum Yeri ve Tarihi : Orhaneli, 22.10.1982
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise : Bursa Ali Osman Sönmez Fen Lisesi-2000
Lisans : Eskişehir Osmangazi Üniversitesi-2005
Yüksek Lisans : Uludağ Üniversitesi-2007

Çalıştığı Kurum ve Yıl : Uludağ Üniversitesi-2006
İletişim (e-posta) : elifyasar@uludag.edu.tr
Yayınları :

Özdemir, S.T., Ercan, İ.,Sevinç, Ö., Güney, İ., Ocakoğlu, G., Aslan, E., **Barut, Ç. 2007.** Statistical shape analysis of differences in the shape of the Corpus Collasum between genders. *The Anatomical Record*, 290:825-830.

Yaşar, E.,Güney, İ. 2007. Analyzing the S character with thin plate spline. *Journal of analysis and computation*,.3(2): 109-114.

Yalçın, S., Joshi, S.B., Yaşar, E. 2010. On Certain Subclass Of Harmonic Univalent Functions Defined By A Generalized Ruscheweyh Derivatives Operator. *Applied Mathematical Sciences*, 4(7): 327-336.

Yaşar, E. Yalçın, S. 2010. On a subclass of harmonic univalent functions of complex order. Proceedings Volume of International Symposium On Geometric Function Theory and Applications, 27-31 August, Sofia, Bulgaria, pp:295-300.

Yaşar, E., Yalçın, S. 2011a. Harmonic univalent functions starlike or convex of complex order. *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences*, 27(3):269-277.

Yaşar, E., Yalçın, S. 2011b. Neighborhoods of a new class of harmonic multivalent functions. *Comp. Math. Appl*.,62:462-473.

Yaşar, E., **Yalçın, S. 2012.** Certain subclasses of harmonic univalent functions associated with generalized Salagean operator. *Acta Universitatis Apulensis*, 29:153-163.